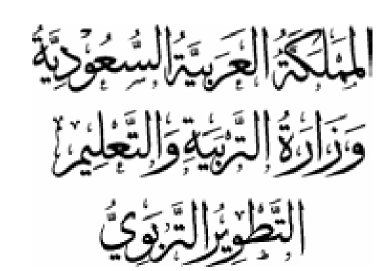




الرّياضيّات

للصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

(تعليم عام - تحفيظ قرآن)

تأليف :

د. سلمان عبدالرحمن السلمان | د. محمد عبدالرحمن القويز
د. عبدالله محمد الراشد | د. فوزي أحمد الذكير
د. عبدالله المقوشي | د. عبدالرحمن أبوعمة
أ. محمد أمين شاكر

طبعة ١٤٢٨هـ ـ ١٤٢٩هـ
٢٠٠٧م ـ ٢٠٠٨م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الأول الثانـوي : الفصل الدراسي الثاني – ط ٥ – الرياض
٢٣٢ ص ؛ ٢١x٢٣ سم
ردمك : ٤ – ٢١٦ – ١٩ – ٩٩٦٠ (مجموعة)
٠ – ٢١٨ – ١٩ – ٩٩٦٠ (ج٢)
١ ـ الرياضيات ـ كتب دراسيـة ٢ ـ السعودية – التعليم الثانوي ـ كتب دراسية
أ ـ العنوان
ديوي ٠٧١٢، ٥١٠ ٢١٨٨ / ١٩

لهذا الكتاب قيمة مهمّة وفائدة كبيرة فلنحافظ عليه ولنجعل نظافته تشهد على حسن سلوكنا معه...

إذا لم تحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتنا الخاصة في آخر العام للاستفادة فلنجعل مكتبة مدرستنا تحتفظ به...

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa


بسم الله الرحمن الرحيم

مقــــدمـــــــة

الحمد لله رب العالمين علَّم بالقلم، علَّم الإنسان ما لم يعلم. والصلاة والسلام على سيدنا محمد سيد الأولين والآخرين، بُعث معلماً وهادياً وعلى آله وصحبه أجمعين.

أما بعد، فإننا نقدم لأبنائنا طلبة وطالبات المرحلة الثانوية الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي، وفق المنهج الذي اعتمدته وزارة التربية والتعليم والذي تمت مناقشته في ندوة ضمَّت ممثلين للجامعات السعودية وعدداً من الباحثين والمربين والميدانيين من مناطق مختلفة من المملكة، وذلك خلال الفترة ٩ ـ ١٠ جمادى الآخرة لعام ١٤٠٦هـ.

جاء هذا الجزء امتداداً لما سبق أن قدمناه في الجزء الأول من هذا الكتاب، وعلى النهج نفسه الذي قدم فيه ذلك الجزء من حيث مراعاة طبيعة هذا الصف الذي هو مفترق طرق بين اتجاهات التعليم المختلفة، ومن حيث ربط المفاهيم بحياة الطالب والطالبة العملية وبالمفاهيم التي يتلقاها الطالب والطالبة في المواد الدراسية الأخرى، وكذلك بما يصادفه الطالب والطالبة في هذا العصر من معطيات تقنية بالإضافة إلى تراثنا المشرق خلال حضارتنا الإسلامية الزاهرة.

يضم هذا الجزء أربعة أبواب هي :

الباب الخامس : المتباينات.

الباب السادس : حساب المثلثات.

الباب السابع : الدوال الأسيِّة واللُّوغاريتمية .

الباب الثامن : الإحصاء.

وكما قلنا في مقدمة الجزء الأول من الكتاب، فقد تم عرض المفاهيم بشكل يساعد الطالب والطالبة على التعلم الذاتي إذا أراد، لذا فقد بنيت المفاهيم على

معلومات الطالب والطالبة السابقة، وتم إيضاحها من خلال أمثلة متنوعة، لعلَّها تساعد غالبية أبنائنا على استيعاب هذه المفاهيم، ونصيحتنا لهم بالاعتماد، بعد توفيق الله تعالى، على الكتاب سعياً وراء ذلك .

أملنا أن تصلنا من إخواننا المدرسين والمدرسات ملحوظاتهم مفصلة على ما فيه، من خلال التطبيق العملي الميداني، شاكرين لهم تعاونهم البنَّاء، والله ولي التوفيق.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

وصلى الله على سيدنا محمد وآله وصحبه.

المؤلفون

الفهـــــرس

الباب الخامس : المتباينات ٨

٥ ـ ١ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي والفترات الحقيقية ٩

٥ ـ ٢ متباينات الدرجة الأولى في ح ١٦

تمارين (٥ ـ ١) ٢٥

٥ ـ ٣ المتباينات الخطِّية في متغيِّرين ٢٧

تمارين (٥ ـ ٢) ٣٦

تمارين عامة على الباب الخامس ٣٧

الباب السادس : حساب المثلثات ٣٨

٦ ـ ١ نبذة تاريخية ٣٩

٦ ـ ٢ الزوايا وقياسها ٤٠

تمارين (٦ ـ ١) ٤٥

٦ ـ ٣ الدوال المثلثية للزوايا الحادة ٤٧

تمارين (٦ ـ ٢) ٥١

٦ ـ ٤ العلاقة بين الدوال المثلثية والمثلث قائم الزاوية ٥٢

تمارين (٦ ـ ٣) ٥٤

٦ – ٥ بعض العلاقات المثلثية ٥٦

تمارين (٦ ـ ٤) ٥٩

٦ – ٦ الجداول المثلثية والحاسبات واستخداماتها ٦٠

٦ ـ ٧ حساب الارتفاعات والأبعاد ٦٥

تمارين (٦ ـ ٥) ٦٨

تمارين عامة على الباب السادس ٧٠

الباب السابع : الدوال الأسية واللّوغاريتمية ٧٤

٧ ـ ١ الأسس ٧٥

تمارين (٧ ـ ١) ٧٧

تمارين (٧ ـ ٢) ٨١

تمارين (٧ ـ ٣) ٨٩

٧ ـ ٢ الجذور ٩١

تمارين (٧ ـ ٤) ٩٨

تمارين (٧ ـ ٥) ١٠٦

٧ ـ ٣	الدالة الأسية	١٠٨
	تمارين (٧ ـ ٦)	١١٣
٧ ـ ٤	تطبيقات جبرية	١١٤
	تمارين (٧ ـ ٧)	١١٥
٧ ـ ٥	تعريف اللوغاريتم ـ الدالة اللّوغاريتمية	١١٦
	تمارين (٧ ـ ٨)	١٢٤
٧ ـ ٦	قوانين اللّوغاريتمات	١٢٥
	تمارين (٧ ـ ٩)	١٣١
٧ ـ ٧	اللّوغاريتمات العشريَّة	١٣٣
	تمارين (٧ ـ ١٠)	١٤٥
٧ ـ ٨	الاستفادة من اللّوغاريتمات في إجراء الحسابات	١٤٦
	تمارين (٧ ـ ١١)	١٥٢
	تمارين عامة على الباب السابع	١٥٣

الباب الثامن : الإحصاء ١٥٧

٨ ـ ١	مقدمة	١٥٨
٨ ـ ٢	جمع البيانات	١٦١
	تمارين (٨ ـ ١)	١٦٥
٨ ـ ٣	التوزيعات والجداول التكرارية	١٦٥
٨ ـ ٤	التمثيل البياني للجداول التكرارية	١٧٤
	تمارين (٨ ـ ٢)	١٨٤
٨ ـ ٥	المتوسطات	١٨٨
	تمارين (٨ ـ ٣)	٢٠٦
٨ ـ ٦	الانحراف المعياري	٢٠٩
	تمارين (٨ ـ ٤)	٢١٨
	تمارين عامة على الباب الثامن	٢٢٠
	إجابة تمارين الجزء الثاني	٢٢٢

الباب الخامس

المتباينات

٥ ـ ١ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي والفترات الحقيقية .

٥ ـ ٢ متباينات الدرجة الأولى بمتغير واحد .

٥ ـ ٣ المتباينات الخطية في متغيرين .

٥ ـ ١ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي والفترات الحقيقية

لقد سبق لك أن درست في المرحلة المتوسطة مفهوم القيمة المطلقة لعدد، وفي هذا البند سنبدأ بتعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي ونقدم بعض الخصائص لهذا المفهوم.

تعريف (٥ ـ ١) :

إذا كان أ عدداً حقيقياً فإن القيمة المطلقة لِـ أ ونرمز لها بالرمز | أ | تُعرَّف على النحو التالي :

$$|أ| = \begin{cases} أ & \text{إذا كان } أ > ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } أ = ٠ \\ -أ & \text{إذا كان } أ < ٠ \end{cases}$$

مثال (٥-١) :

أوجد القيمة المطلقة للأعداد ٧ ، $-\sqrt{٢}$ ، $١ - \sqrt{٥}$

الحل :

بما أن العدد ٧ > ٠

إذن | ٧ | = ٧

أما العدد $-\sqrt{٢}$ فإنه سالب ، أي $-\sqrt{٢} < ٠$

إذن | − √٢ | = − (−√٢) = √٢

وكذلك فإن ١ − √٥ < ٠ (لماذا ؟)

إذن |١−√٥| = − (١ − √٥) = √٥ − ١

نستنتج من هذا المثال أن مفهوم القيمة المطلقة للعدد الحقيقي ما هو إلا عملية التخلُّص من الإشارة السالبة للعدد إن وُجدت، أي أنَّ القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هو عدد غير سالب ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً بقولنا :

لكل أ ∈ ح ، |أ| ≥ ٠

مثــــال (٥-٢) :

(١) ماهي قيمة $\frac{\text{س}}{|\text{س}|}$ من أجل أي عدد موجب؟ ومن أجل أي عدد (سالب)؟

(٢) حل المعادلة : |س| = ٤

(٣) أوجد المسافة بين النقطتين الممثَّلتين للعددين ٣ ، ١١ على خط الأعداد .

الحـــــــــل :

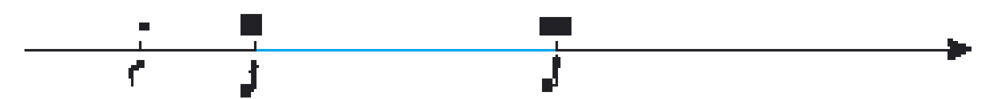
(١) عندما س > ٠ فإن |س| = س وعليه : $\frac{\text{س}}{|\text{س}|} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$

وعندما س < ٠ فإن |س| = − س وعليه : $\frac{\text{س}}{|\text{س}|} = \frac{\text{س}}{-\text{س}} = -١$

(٢) |س| = ٤ يعـني أن النقطة الممـثِّلة لقيـمة س على خـط الأعـداد تبعد عن م (الممثِّلة للصفر) ٤ وحدات طول، وعليه فإنَّه توجـد قيمتان تحقّقان المعادلـة هما : س = ٤ ، س = −٤

تحقَّق من ذلك .

(٣) المسافة بين النقطتين $أ_١$ ، $أ_٢$ الممثِّلتين للعددين ٣ ، ١١ على الترتيب كما في الشكل :



هي : $|أ_١ أ_٢| = |١١ - ٣| = ٨$

وكان بإمكانك أن تكتب : $|أ_١ أ_٢| = |٣ - ١١| = |-٨| = ٨$

خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي :

نورد الآن بعض خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي من خلال النظرية التالية :

نظريـــــة (٥ - ١) :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيَّين فإن :

(١) $|أ| = |-أ|$

(٢) $|أ| \geq أ \geq -|أ|$

(٣) $|أ . ب| = |أ| . |ب|$

(٤) $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$ ، ب $\neq ٠$

البــرهـــان :

الخاصتان (١) ، (٢) يترك برهانها للطالب انطلاقاً من التعريف (٥-١) وذلك باستقصاء جميع الحالات الممكنة.

(٣) لبرهان هذا الجزء نستعمل الحقيقة $\sqrt{أ^٢} = |أ|$ لأي عـدد حقيقي أ والتي نستنتجها من تعريف الجذر التربيعي $\sqrt{}$ ونعني به الجذر التربيعـي غير السالب

للعدد، كما رأيت في المرحلة المتوسطة ،

وعليه : $|أب| = \sqrt{(أب)^{٢}}$

$= \sqrt{أ^{٢} ب^{٢}}$

$= \sqrt{أ^{٢}} \sqrt{ب^{٢}}$

$= |أ| |ب|$

(٤) $\frac{أ}{ب} \times ب = أ$

$\Leftarrow |\frac{أ}{ب} \times ب| = |أ|$

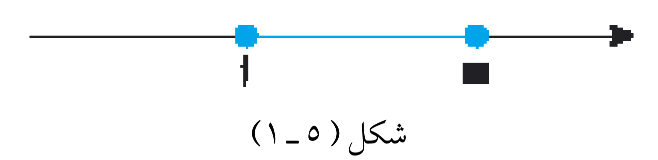
$\Leftarrow |\frac{أ}{ب}| |ب| = |أ|$ من الفقرة (٣)

$\Leftarrow |\frac{أ}{ب}| = \frac{|أ|}{|ب|}$ لأن $|ب| \neq ٠$

الفـتـرات الحقيقـيـة :

ليكن أ ، ب عددين حقيقيين إن :

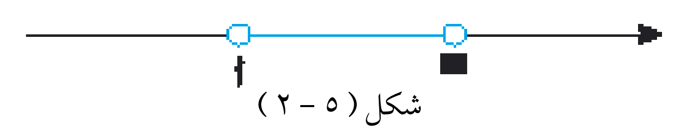
(١) المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية { س ∈ ح : أ ≤ س ≤ ب } والتي نرمز لها بالرمز [أ ، ب] تسمى **الفترة المغلقة** من أ إلى ب ونمثّلها على خط الأعداد كما في الشكل (٥ – ١).



شكل (٥ ـ ١)

(٢) المجموعة الجزئية من الأعـداد الحـقيقـية { س ∈ ح : أ < س < ب } والتي نرمز لها بالرمز (أ ، ب) أو]أ ، ب [تسمى **الفـتـرة المفـتوحـة** من أ إلى ب

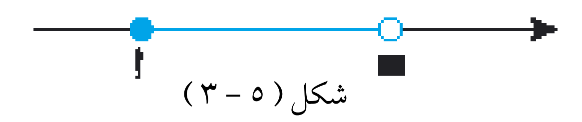
ونمثِّلها على خط الأعداد الحقيقيَّة كما في الشكل (٥ – ٢) .



شكل (٥ – ٢)

لاحظ أن الدائرتين الفارغتين عند النقطتين أ ، ب تعنيان أن أ ، ب لا ينتميان إلى الفترة (أ ، ب).

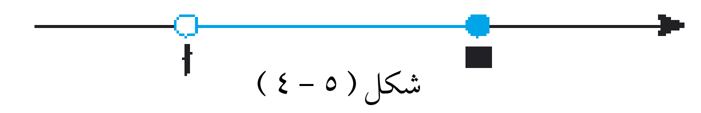
(٣) المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية { س ∈ ح : أ ≤ س < ب } والتي نرمز لها بالرمز [أ ، ب) أو [أ ، ب [الممثَّلة بالشكل (٥ – ٣)،



شكل (٥ – ٣)

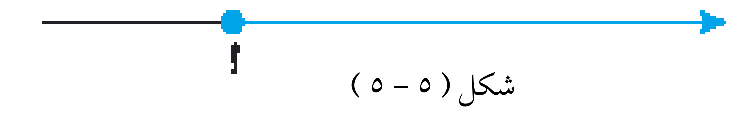
والمجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية { س ∈ ح : أ < س ≤ ب }

ونرمز لها بالرمز (أ ، ب] أو] أ ، ب] الممثَّلة بالشكل (٥ – ٤) يطلق على كل منهما اسم الفترة **نصف المفتوحة (أو نصف المغلقة)** من أ إلى ب .



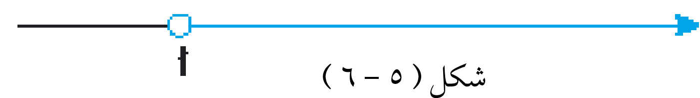
شكل (٥ – ٤)

نستعمل الرمز [أ ، ∞) للدلالة على المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية { س ∈ ح : س ≥ أ } الممثَّلة بالشكل (٥ – ٥).



شكل (٥ – ٥)

والرمز (أ ، ∞) للدلالة على المجموعة الجزئية { س ∈ ح : س > أ } الممثَّلة بالشكل (٥ – ٦).



شكل (٥ – ٦)

نستعمل الرمز (– ∞ ، أ] للدلالة على المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية { س ∈ ح : س ≤ أ} الممثلة بالشكل (٥ – ٧) ،

أ

شكل (٥ – ٧)

والرمز (– ∞ ، أ) للدلالة على المجموعة الجزئية { س ∈ ح : س < أ} الممثَّلة بالشكل (٥ – ٨).

أ

شكل (٥ – ٨)

إن الرمز (– ∞ ، ∞) يعني مجموعة الأعداد الحقيقية ح ـ ولعلَّه من المناسب هنا أن نؤكد أن الرمزين ∞ و – ∞ ليسا عددين حقيقيَّين.

ملحوظة (٥ ـ ١) :

إن الفترات [أ، ب] ، (أ، ب) ، [أ، ب)، (أ، ب[تسمى فترات محدودة لأن طول قطعة المستقيم التي تمثِّل أيًّا منها يساوي ب – أ، كما تعلم ، أما الفترات [أ ، ∞) ، (أ ، ∞) ، (– ∞ ، أ] ، (– ∞ ، أ) ، (– ∞ ، ∞) فتسمى فترات غير محدودة.

مثال (٥-٣) :

مثِّل المجموعات التالية على خط الأعداد ، ثم عبِّر عنها باستعمال ترميز الفترات بأبسط ما يمكن .

(١)] ٧ ، ٣) – ح

(٢)) ٣ ، ٧]

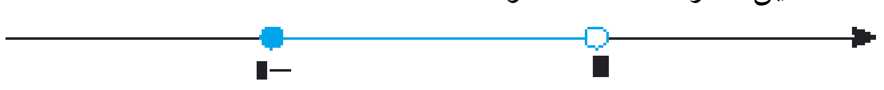
(٣)] ٧ ، ٣) ∪) ٤ ، –١]

(٤)) ٤ ، –١]

(٥)] ٧ ، ٣) ∩) ٤ ، –١]



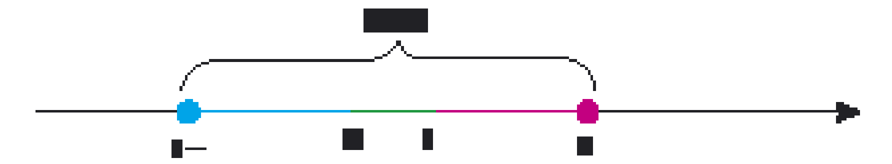
(١) تمثيل الفترة [١-، ٤) هو



(٢) تمثيل الفترة (٣ ، ٧] هو



(٣) تمثيل اتحاد الفترتين [١ - ، ٤) و (٣ ، ٧] هو كما في الشكل .



وهذه المجموعة هي الفترة [١ - ، ٧]

إذن [١ - ، ٤) ∪ (٣ ، ٧] = [١ - ، ٧]

(٤) المجموعة ح - (٣ ، ٧] هي متممة المجموعة الممثلة في (٢) ويكون

تمثيلها كما في الشكل.

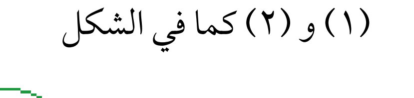


هذه المجموعة هي اتحاد الفترتين (- ∞ ، ٣] و (٧ ، ∞) ، أي أن :

ح - (٣ ، ٧] = (- ∞ ، ٣] ∪ (٧ ، ∞)

(٥) تمثيـل [١ - ، ٤) ∩ (٣ ، ٧] هـو تقـاطـع المجمـوعتيـن الممثلتين في

(١) و (٢) كما في الشكل





إذن [١ - ، ٤) ∩ (٣ ، ٧] = (٣ ، ٤)

٥ ـ ٢ متباينات الدرجة الأولى في ح

درست في المرحلة المتوسطة حل المتباينات (المتراجحات) من الدرجة الأولى بمتغير واحد في كل من مجموعة الأعداد الصحيحة ص ومجموعة الأعداد النسبية ن ، كما درست نظم متباينات (متراجحات) الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

في هذا البند سنقوم بمراجعة موضوع متباينات الدرجة الأولى في ح كما نقوم بتقديم متباينات تحتوي على عبارات جبرية ترد فيها القيمة المطلقة. نبدأ هذا البند بتقديم حقائق تتعلق بالمتباينات بصورة عامة.

إذا كانت د(س) وَ ر(س) عبارتين جبريتين في المتغير س ، فالشكل العام للمتباينات في ح هو د(س) < ر(س) أو د(س) ≥ ر(س)

تعريف (٥ ـــ ٢) :

إذا كانت د(س) < ر(س) أو د(س) ≥ ر(س) متباينة في ح فإن مجموعة حلِّها هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي لو أبدلنا ها بالمتغيَّر س لحقَّقت شرط المتباينة.

تعريف (٥ ـــ ٣) :

يقال عن متباينتين في ح إنَّهما متكافئتان إذا كان لهما مجموعة الحلَّ نفسها

خصائص المتباينات :

إن الخصائص التالية للمتباينات سبق أن تعرّفْتَ عليها في المرحلة المتوسطة ونلخّصها فيما يلي :

(١) المتباينة د (س) > ه (س) ⟺

د (س) + ن (س) > ه (س) + ن (س) (٥ – ١)

(٢) المتباينة د (س) > ه (س) ⟺

ن (س) × د (س) > ن (س) × ه (س) (٥ – ٢)

إذا كانت ن (س) > ٠

(٣) المتباينة د (س) > ه (س) ⟺

ن (س) × د (س) < ن (س) × ه (س) (٥ – ٣)

إذا كانت ن (س) < ٠

حيث ن (س) عبارة جبرية بالمتغير س

ملحوظة (٥ ـ ٢) :

إن الحقائق السابقة تبقى سارية إذا كان لدينا د (س) ≥ ه (س) بدلاً من د (س) > ه (س) .

متباينات الدرجة الأولى في ح

مثال (٥-٤) :

حل المتباينة التالية ثم مثِّل حلَّها على خط الأعداد الحقيقية :

$$\frac{س - ٥}{٣} < \sqrt{٢}$$

الحل :

بضرب طرفي المتباينة في ٣ نحصل على المتباينة المكافئة :

س – ٥ < ٣ $\sqrt{٢}$ حسب الخاصة (٥ – ٢)

وبإضافة ٥ إلى طرفي المتباينة نحصل على :

س > ٣ $\sqrt{٢}$ + ٥

وهي تكافئ المتباينة (٥ – ٢) حسب الخاصة (٥ – ١) .

إذن مجموعة حل المتباينة المطلوب حلُّها هي {س ∈ [illegible] : س > ٣ $\sqrt{٢}$ +٥}

وهي الفترة (٣ $\sqrt{٢}$ +٥، ∞) ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما في الشكل:

[illegible]

قبل أن نقوم بحلِّ متباينات من الدرجة الأولى بمتغيِّر واحد وتحتوي على القيمة المطلقة لابد لنا من أن نقدِّم حقيقتين هامتين تتعلق بالقيمة المطلقة وذلك من خلال النظريتين التاليتين :

نظـريـــة (٥ - ٢) :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين وكان ب ≥ ٠ فإنَّ :

|أ| ≤ ب ⟺ - ب ≤ أ ≤ ب

البــرهـــان :

(١) سنبرهن أولاً أن : |أ| ≤ ب ⟸ - ب ≤ أ ≤ ب .

إذا كان أ ≥ ٠ فإن |أ| = أ حسب التعريف (٥ – ١)

أي أن : |أ| ≤ ب ⟸ أ ≤ ب

⟸ - ب ≤ أ ≤ ب لأن ب ≥ ٠ بالفرض

وإذا كان $أ < ٠$ فإن $|أ| = -أ$ حسب االتعريف (٥ – ١)

أي أن : $|أ| \leq ب \Leftarrow -أ \leq ب$

$\Leftarrow أ \geq -ب$ بعد الضرب في ١−

$\Leftarrow -ب \leq أ$

$\Leftarrow -ب \leq أ \leq ب$ لأنَّ $أ < ٠$ ، $ب \geq ٠$

(٢) سنبرهن ثانياً العكس وهو : $-ب \leq أ \leq ب \Leftarrow |أ| \leq ب$.

فنفرض أن $-ب \leq أ \leq ب$

فإذا كانت $أ \geq ٠$ فإن : $أ = |أ|$ والمتباينة الثانية من الفرض تصبح $|أ| \leq ب$

وإذا كانت $أ < ٠$ فإن : $أ = -|أ|$ والمتباينة الأولى من الفرض تصبح

$-ب \leq -|أ|$

وبالضرب في ١− تصبح المتباينة الأخيرة $|أ| \leq ب$.

ملحوظة (٥ - ٣) :

في الحالة التي فيها $|أ| < ب$ تكون المتباينة المكافئة لها : $-ب < أ < ب$.

نظرية (٥ - ٣) :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإنَّ :

$|أ| \geq ب \Leftrightarrow أ \geq ب$ أو $أ \leq -ب$

البرهان مشابه في خطواته لبرهان نظرية (٥ – ٢) لذا نتركه كتمرين للطالب

(انظر تمرين ٣ في نهاية هذا البند).

مثـــال (٥-٥) :

حل المتباينة التالية ومثِّل حلَّها على خط الأعداد :

$$\left| \frac{س - ٢}{٥} \right| \leq ٤$$

الحـــــــــــل :

باستخدام نظرية (٥ - ٢) تكون المتباينة المكافئة لها :

$$-٤ \leq \frac{س - ٢}{٥} \leq ٤$$

بضرب جميع الأطراف بالعدد ٥ نحصل حسب الخاصة (٥ - ٢) على المتباينة

المكافئة: $-٢٠ \leq س - ٢ \leq ٢٠$

وبإضافة العدد ٢ إلى الأطراف الثلاثة نحصل حسب الخاصة (٥ - ١) على

المتباينة المكافئة :

$$-١٨ \leq س \leq ٢٢$$

نستنتج أنَّ مجموعة حل المتباينة هي {س ∈ ح : $-١٨ \leq س \leq ٢٢$}

وهذه هي الفترة [-١٨ ، ٢٢] التي تمثيلها كما في الشكل :



مثـــال (٥-٦) :

حل المتباينة التالية ومثّل حلّها على خط الأعداد :

$$| س - ١ | \geq ٢$$

الحـــــــــــل :

حسب نظرية (٥ - ٣) تكون المتباينة مكافئة للعبارة :

$$س - ١ \leq ٢ \quad \text{أو} \quad س - ١ \geq -٢$$

$$\Leftrightarrow \quad س \leq ٣ \quad \text{أو} \quad س \geq -١ \quad \text{حسب الخاصة (٥ - ١)}$$

$$\Leftrightarrow \quad س \in [٣ ، \infty) \quad \text{أو} \quad س \in (-\infty ، -١]$$

$$\Leftrightarrow \quad س \in [٣ ، \infty) \cup (-\infty ، -١]$$

إذن مجموعة حل المتباينة هي $[٣ ، \infty) \cup (-\infty ، -١]$ التي تمثيلها كما في الشكل :



نظام متباينات الدرجة الأولى في ح

إن نظام متباينات من الدرجة الأولى هو مجموعة من متباينات الدرجة الأولى مرتبطة بالرابط المنطقي «و» أو بالرابط المنطقي « أو »، على سبيل المثال المتباينة الواردة في المثال (٥ - ٥) هي في حقيقة الأمر نظام يتكوَّن من متباينتين مرتبطتين بالرابط «و» كما هو مبين فيما يلي :

$$\frac{س -٢}{٥} \leq ٤ \quad \text{و} \quad \frac{س -٢}{٥} \geq -٤$$

كذلك المتباينة الواردة في المثال (٥ - ٦) هي في حقيقة الأمر نظام يتكون من متباينتين مرتبطتين بالرابط « أو » وهو :

$$س - ١ \geq ٢ \quad \text{أو} \quad س -١ \leq -٢$$

مثـــال (٥-٧) :

أوجد حل النظام التالي ومثِّل مجموعة الحل على الخط الأعداد :

$$١٠ - س < ١٧ \quad \text{و} \quad |س| \leq ١٢$$

الحـــــــــل :

المتباينة الأولى تكافىء : − س < ٧ وهي تكافىء : س > −٧ .

إذن مجموعة حلها هي الفترة (−٧ ، ∞) .

المتباينة الثانية تكافىء −١٢ ≤ س ≤ ١٢ حسب النظرية (٥ − ٢).

إذن مجموعة حلها هي الفترة [−١٢ ، ١٢].

لما كان لدينا الرابط « و » يربط المتباينتين في النظام فإن مجموعة حل النظام هي تقاطع مجموعة حل المتباينة الأولى مع مجموعة حل المتباينة الثانية .

إذن مجـمـوعة الحـل هـي (−٧ ، ∞) ∩ [−١٢، ١٢] وتمـثـيلها كما فـي الشكل الآتـي :



يتبين من الشكل أن مجموعة حل النظام هي الفترة نصف المفتوحة (−٧، ١٢].

مـثـــال (٥-٨) :

حل النظام التالي ومثِّل مجموعة الحل على خط الأعداد :

س − ٧ < ٢س + ٤

أو $\frac{\text{س} - ٢}{٤} \geq ٣$

الحـــــــــل :

المتباينة س − ٧ < ٢س + ٤ تكافىء : −٧ − ٤ < س ⟺ −١١ < س

وذلك حسب الخاصة (٥ – ١).

إذن مجموعة حل المتباينة هي الفترة (– ∞، – ١١).

المتباينة $\frac{س-٢}{٤} \geq ٣$ تكافئ .

$س-٢ \geq ١٢$ حسب الخاصة (٥ – ٢).

$\Leftrightarrow$ $س \geq ١٤$ حسب الخاصة (٥ – ١).

إذن مجموعة الحل هي الفترة [١٤ ، ∞) .

لما كان لدينا الرابط « أو » يربط المتباينتين في النظام فإن مجموعة حل النظام هي اتحاد مجموعة حل المتباينة الأولى مع مجموعة حل المتباينة الثانية.

إذن مجموعة الحل هي (– ∞ ، –١١) ∪ [١٤،∞) وتمثيلها كما في الشكل التالي:

تطبيقات هندسية :

هناك تطبيقات عديدة لموضوع نظام متباينات الدرجة الأولى نور منها تطبيقاً هندسياً من خلال المثالين التاليين :

مـثــال (٥-٩) :

إذا كان طولا ضلعي مثلث هما ٧ سم و ١٥ سم ففي أي مدى يقع طول الضلع الثالث؟

الحــــل :

نفرض أن طول الضلع الثالث س ، ومعلوم أن س > ٠

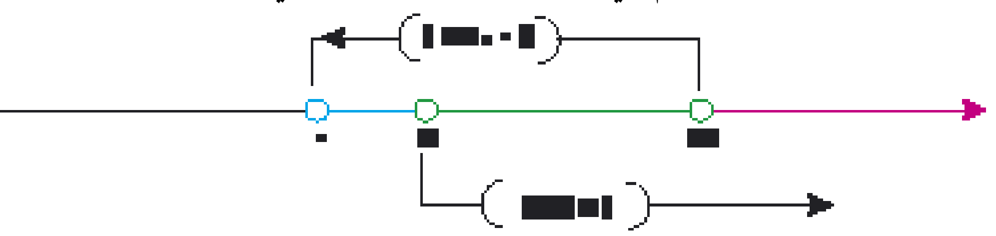
وبما أن مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث فإننا نحصل على:

$٧ + ١٥ > س > ٠$

و $٧ + س > ١٥$

مجموعة حل المتباينة الأولى هي الفترة (٠ ، ٢٢) أما المتباينة الثانية فمجموعة حلها هي (٨ ، ∞).

إذن مجموعة حل النظام هي (٠ ، ٢٢) ∩ (٨ ، ∞) والتي تمثيلها كما في الشكل:



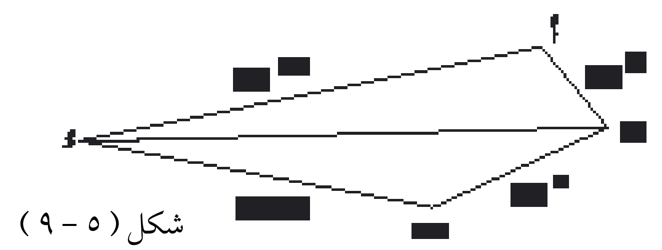
أي أن مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة (٨ ، ٢٢). نستنتج أنَّ طول الضلع الثالث يقع بين ٨ سم و ٢٢ سم .

مـثـــال (٥-١٠) :

إذا كانت أطوال أضلاع شكل رباعي أ ب ﺟ ء هي ٣ سم ، ٥سم ، س سم، ١٢ سم فأوجد مدى س .

الحـــــــل :

نرسم شكلاً رباعياً كما في الشكل (٥ – ٩).



شكل (٥ – ٩)

نصل القطر [ب ء] ثم نعتبر المثلث أ ب ء .

باستخدام طريقة حل المثال (٥ – ٩) نستنتج أنَّ :

٩ < |ب ء| < ١٥ (٥ – ٤)

حيث إنَّ | ب ء | تعني طول الضلع [ب ء].

وباستخدام طريقة المثال (٥ – ٩) مرة أخرى في المثلث ب جـ ء ، نستنتج أنَّ :

| ب ء | – ٥ < س < | ب ء | + ٥ (٥ – ٥)

من (٥ – ٤) نحصل على :

٩ – ٥ < | ب ء | – ٥ (٥ – ٦)

و | ب ء | + ٥ < ١٥ + ٥ (٥ – ٧)

من (٥ – ٥) ، (٥ – ٦) ، (٥ – ٧) نستنتج أنَّ :

٤ < | ب ء | – ٥ < س < | ب ء | + ٥ < ٢٠

إذن ٤ < س < ٢٠ وهو المدى المطلوب. وهذا يعني أنَّ طول الضلع الرابع س هو عدد حقيقي ينتمي إلى الفترة (٤ ، ٢٠).

تمارين (٥ ـ ١)

(١) أوجد القيمة المطلقة لكل من الأعداد :

–٣ ، ٢ – $\sqrt{٨}$ ، ٤ – $\sqrt{١٧}$ ، $\sqrt{٥}$ ٢ – $\sqrt{٢}$

(٢) مثِّل المجموعات التالية على خط الأعداد، ثم عبِّر عنها باستعمال ترميز الفترات بأبسط ما يمكن :

(أ) (٢٠ ، –١٧] (ب)] $\frac{١}{٢}$ ٥ ، ٧]

(جـ)] ١ ، ٢) ∪] ٢ ، ١١]

(ء) (– $\frac{١}{٢}$ ، $\sqrt{٢}$] ∩] ١ ، ٥) (هـ) ح –] ٢ ، ٩)

(٣) أثبت أنَّ | أ | ≤ ب ⟺ أ ≤ ب أو أ ≥ – ب

في التمارين (٤) - (٩) حل المتباينة ثم مثِّل حلَّها على خط الأعداد .

(٤) | س - ٢ |> ٥ (٥) | $\frac{٦+٣س}{-٧}$ | ≥ ٢٠

(٦) | س + ٤ |> ٣ (٧) | س | < -١

(٨) $\frac{١}{|س - ٣|}$ ≤ ٨ ، س ≠ ٣ (٩) | س |≥| س - ١|

في التمارين (١٠) - (١٣) أوجد حل نظام المتباينات ثم مثِّل مجموعة الحل على خط الأعداد .

(١٠) ١٢ - ٥ س ≤ ٢
و |س - $\frac{١}{٢}$ |> ٢

(١١) | س - ٢ |> ٧
و | س + ٢ | ≤ ٣

(١٢) | س | ≤ ١١
أو $\frac{١ - س}{٢}$ > ٥

(١٣) | س - ٣ |> ١
أو $\frac{س + ١١}{٢}$ ≥ ٨

(١٤) إذا كان طولا ضلعي مثلث هما ٢ سم و ١١سم ففي أي مدى يقع طول الضلع الثالث؟

(١٥) إذا كانت أطوال أضلاع شكل رباعي هي ٤سم ، ٦سم ، ١٣سم ، س سم فأوجد مدى س.

(١٦) المسافة بين الرياض ومكة المكرَّمة ٨٧٠كم تقطعها سيارة في ٩ساعة. إذا كانت سرعة السيارة في الساعات الخمس الأولى تقع قيمتها بين ١٠٠ و ١٢٠كم/ ساعة ففي أي مدى تقع سرعة السيارة في الساعات الأربع الباقية؟ (نفرض أن السرعة ثابتة في كلٍّ من الفترتين) .

٥ ـ ٣ المتباينات الخطِّية في متغيِّرين :

درست في البندين السابقين المتباينات ذات المتغير الواحد من الدرجة الأولى

سنتطرق في هذا البند إلى دراسة المتباينات ذات المتغيِّرين من الدرجة الأولى والتي نسمّيها المتباينات الخطّية في متغيِّرين وهي التي يمكن كتابتها بإحدى الصيغ التالية:

أ س + ب ص + جـ > ٠ ، أ س + ب ص + جـ ≥ ٠
أ س + ب ص + جـ < ٠ ، أ س + ب ص + جـ ≤ ٠ (٥ – ٨)

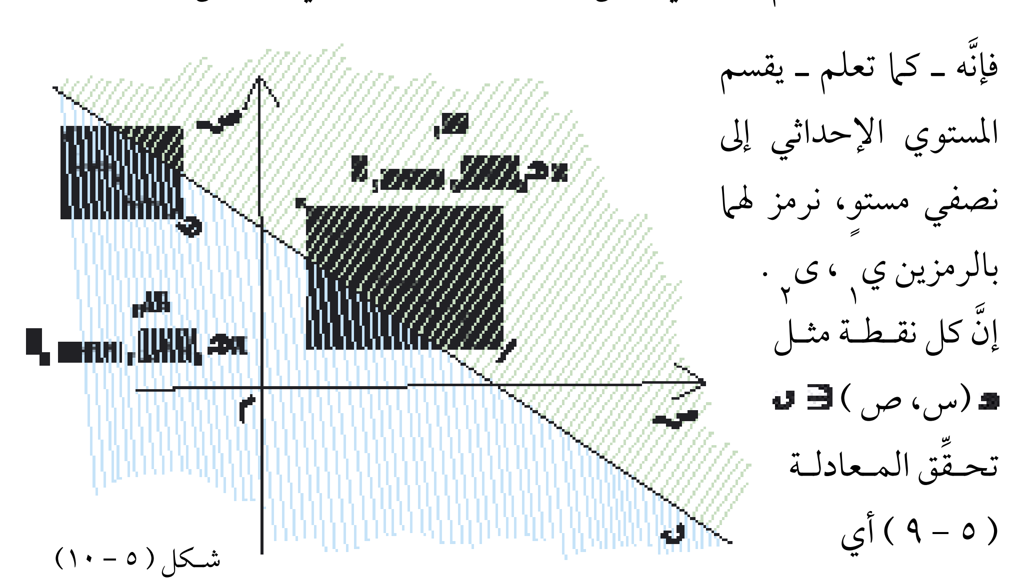
حيث أ ≠ ٠ أو ب ≠ ٠ أما س ، ص فمتغيِّران حقيقيان .

تسمى هذه المتباينات خطِّية لأنه عندما نجعل :

أ س + ب ص + جـ = ٠ (٥ – ٩)

فإننا نحصل على مستقيم ل في المستوي ح × ح ، كما سبق لك أن رأيت في الباب الرابع من هذا الكتاب.

إذا رسمت المستقيم ل الذي يمثّل المعادلة (٥ – ٩) كما في الشكل (٥ – ١٠)



شكل (٥ – ١٠)

فإنَّه ـ كما تعلم ـ يقسم المستوي الإحداثي إلى نصفي مستوٍ، نرمز لهما بالرمزين ي$_1$ ، ي$_2$.

إنَّ كل نقطة مثل ن (س، ص) ∈ ل تحقِّق المعادلة (٥ – ٩) أي

أنها تجعل المقدار أ س + ب ص + جـ مساوياً للصفر.

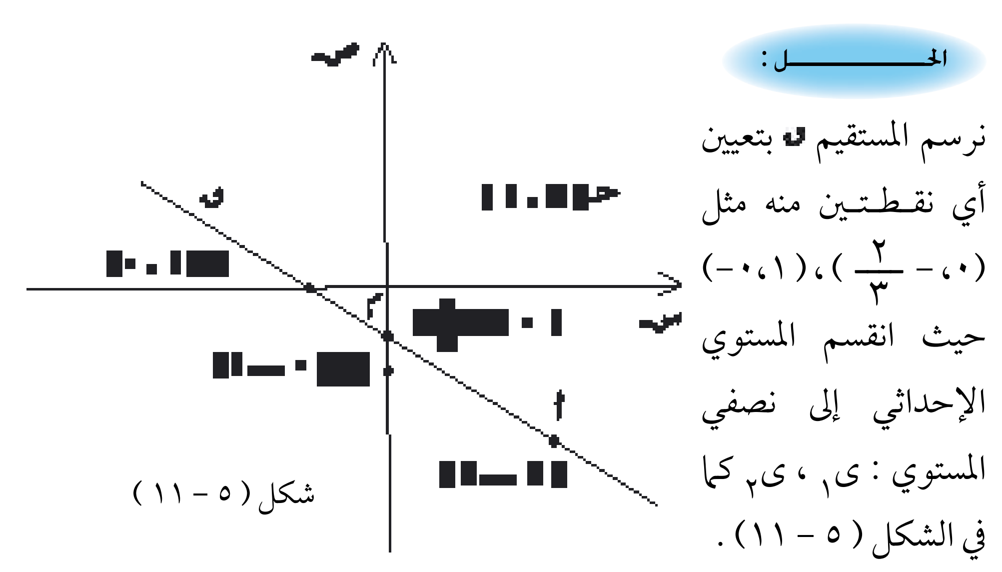
بينما نجد أنَّ كلَّ نقطة مثل هـ$_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) ∈ ى$_١$ أو هـ$_٢$ (س$_٢$ ، ص$_٢$) ∈ ى$_٢$ لا تحقِّق المعادلة (٥ – ٩) أي أنَّها لا تجعل المقدار أ س + ب ص + جـ مساوياً للصفر.

سنرمز لهذا المقدار بالرمز : د (س ، ص) = أ س + ب ص + جـ .

مـثــــال (٥-١١) :

ارسـم المسـتـقـيم ل الذي معـادلتـه : ٢س + ٣ص + ٢ = ٠، ثم أوجـد د (س، ص) = ٢س + ٣ص + ٢ من أجل النقاط أ (٢ ، –٢) ، ب (٠ ، –١) ، جـ (٣ ، ١) وحدِّد موضع كلٍّ من هذه النقاط بالمستوي الإحداثي وماهي إشارة المقدار د (س، ص) = ٢س + ٣ص + ٢ في كلٍّ من هذه النقاط .

الحــــــل :



شكل (٥ – ١١)

نرسم المستقيم ل بتعيين أي نقطتين منه مثل (٠، – $\frac{٢}{٣}$) ، (١، –٠) حيث انقسم المستوي الإحداثي إلى نصفي المستوي : ى$_١$ ، ى$_٢$ كما في الشكل (٥ – ١١) .

من أجل النقطة أ (٢ ، –٢) يكون :

د (٢ ، –٢) = ٢ × ٢ + ٣ × –٢ + ٢ = صفراً أي أن النقطة أ ∈ ل .

من أجل النقطة ب (٠ ، ١-) يكون :

$$د(٠ ، -١) = ٢ \times ٠ + ٣ \times -١ + ٢ = -١$$

النقطة ب $\in$ $ى_٢$ ، وإن د(٠ ، -١) > ٠

من أجل النقطة جـ (٣ ، ١) يكون :

$$د(٣ ، ١) = ٢ \times ٣ + ٣ \times ١ + ٢ = ١١$$

النقطة جـ $\in$ $ى_١$ ، وإن د(٣ ، ١) < ٠

ملحوظة (٥ - ٤) :

يمكننا اعتبار ل $\not\subset$ $ى_١$ حينئذ نسمِّي $ى_١$ نصف مستو مفتوحاً . أما إذا اعتبرنا ل $\subset$ $ى_١$ فإننا حينئذٍ نسمِّي $ى_١$ نصف مستوٍ مغلقاً، وكذلك الحال بالنسبة لنصف المستوي $ى_٢$.

تعريف (٥ - ٤) :

مجموعة حل المتباينة أ س + ب ص + جـ < ٠ هي مجموعة الأزواج المرتَّبة (هـ ، و) في ح × ح بحيث أ هـ + ب و + جـ < ٠ ، أي الأزواج التي تحقِّق المتباينة .

وبالطريقة نفسها نعرِّف مجموعة حل كلٍّ من المتباينات الواردة في الصيغ (٥ – ٨).

من أجل حل المتباينة الخطِّية في متغيِّرين نورد النظرية التالية :

نظرية (٥ - ٤) :

المستقيم الذي معادلته : أ س + ب ص + جـ = ٠

يقسم المستوي الإحداثي إلى نصفي مستوٍ مفتوحين يكون في أحدهما :

أ س + ب ص + جـ < ٠

وفي الآخر : أ س + ب ص + جـ > ٠

البرهان : (غير مطلوب)

البــرهـــان :

ليكن ل المستقيم المعين بالمعادلة أ س + ب ص + جـ = ٠ لدينا ثلاث حالات هي : أ > ٠ ، أ < ٠ ، أ = ٠

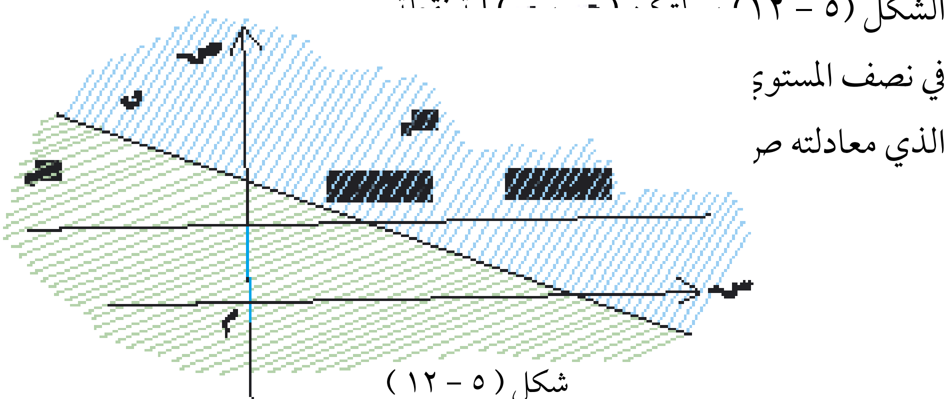
سنقوم ببرهان النظرية في حالة أ > ٠ ونترك الحالتين الأخريين للطالب حيث يمكن معالجتها بصورة مشابهة .

عندما أ > ٠ لا يمكن أن يكون المستقيم ل أفقياً (موازياً لمحور السينات) لأن ميله يساوي $-\frac{أ}{ب} \neq ٠$ (لاحظ أنه عندما ب = ٠ يصبح ل عمودياً على محور السينات) .

ليكن ى$_١$ ، ى$_٢$ نصفي المستوي المفتوحين المفصولين بالمستقيم ل كما في الشكل (٥ – ١٢)

في نصف المستوى

الذي معادلته ص



شكل (٥ – ١٢)

إن المستقيم ت يوازي محور السينات، لذا فلابد أن يقطع المستقيم ل في نقطة نسميها (م ، ر) (لماذا ؟) .

في هذه الحالة هـ > م ⟸ أ هـ > أ م لأن أ > ٠

إذن أ هـ + ب ر + جـ > أ م + ب ر + جـ $\qquad$ (٥ – ١٠).

ولكن (م ، ر) تقع على المستقيم ل .

إذن أ م + ب ر + جـ = ٠ $\qquad$ (٥ – ١١).

نستنتج من (٥ – ١٠) ، (٥ – ١١) أن : أهـ + ب و + جـ > ٠

إن النقطة (هـ ، و) كانت اختيارية في نصف المستوي المفتوح ى$_{١}$ لذا نستنتج أن أ س + ب ص + جـ > ٠ لجميع النقط (س ، ص) في نصف المستوي المفتوح ى$_{١}$.

لو اخترنا (هـ ، و) في نصف المستوي المفتوح ى$_{٢}$ وكررنا ما عملناه سابقاً فإنَّنا نجد أنَّ : هـ > م ⟸ أهـ > أم

إذن أهـ + ب و + جـ > أم + ب و + جـ = ٠

ونستنتج أن أس + ب ص + جـ > ٠ لجميع النقط (س ، ص) في نصف المستوي المفتوح ى$_{٢}$ مما ينهي برهان النظرية في حالة أ > ٠

نتيجة (٥ - ١) :

مجموعة حل المتباينة : أس + ب ص + جـ > ٠

هي مجموعة الأزواج المرتَّبة التي تمثلها جميع النقط الواقعة في أحد نصفي المستوي المفتوحين المحدودين بالمستقيم الذي معادلته :

أس + ب ص + جـ = ٠ (٥ – ١٢)

ومجموعة حل المتباينة : أس + ب ص + جـ ≥ ٠

هي مجموعة الأزواج المرتَّبة التي تمثلها جميع النقط الواقعة في أحد نصفي المستوي المغلقين المحدودين بالمستقيم في (٥ – ١٢).

ملحوظة (٥ - ٥) :

إذا أردنا حل متباينة من الشكل : أس + ب ص + جـ > ٠

فإننا نرسم أولاً المستقيم أس + ب ص + جـ = ٠ منقَّطًا ثم نختار نقطة في المستوي الإحداثي ليست واقعة على المستقيم . فإذا حقَّقت المتباينة نستنتج من

النظرية (٥ - ٤) أنَّ نصف المستوي المفتوح الحاوي على النقطة يمثل مجموعة حل المتباينة المعطاة. أما إذا لم تُحقِّق النقطة المختارة المتباينة المعطاة فتكون مجموعة الحل ممَّثلة بنصف المستوي المفتوح الذي لا يحوي النقطة التي اخترناها.

أما بالنسبة للمتباينة : أ س + ب ص + حـ ≤ ٠

فطريقة تمثيل حلِّها مشابهة لما سبق، إلا أنَّنا نرسم المستقيم :

أ س + ب ص + حـ = ٠ متَّصلاً . وتكون مجموعة الحل ممثَّلة بأحد نصفي المستوى المغلقين .

مـثــــال (٥-١٢) :

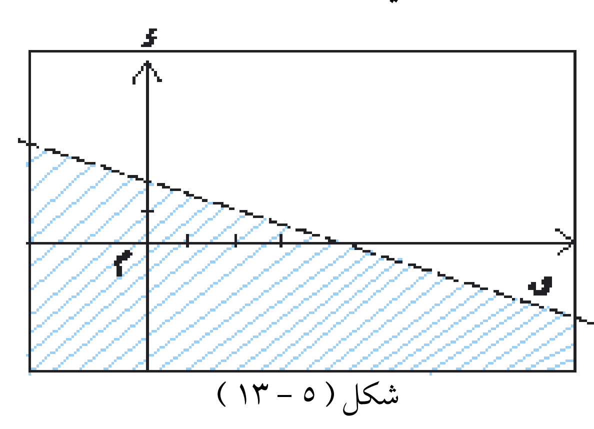
مثِّل حل المتباينة التالية في المستوي الإحداثي : ٢س + ٤ص - ٨ < ٠

الحـــــــــــل :

لمَّا كانت المتباينة غير حاوية على المساواة فإنَّنا نرسم المستقيم :

٢س + ٤ ص - ٨ = ٠ منقَّطاً في المستوي الإحداثي كما في الشكل (٥ - ١٣).

إنَّ نقطة الأصل م لا تقع على المستـقيم ل وعندما نعـوّض س = ٠ ، ص = ٠ في المقدار ٢س + ٤ ص - ٨ نحصل على - ٨ وهو عدد سالب. إذن النقطة (٠ ، ٠) تحقِّق المتباينة المعطاة.



شكل (٥ - ١٣)

إذن نصف المستوي المفتوح الحاوي على نقطة الأصل يمثِّل حل المتباينة وهو الجزء المظلَّل في الشكل (٥ - ١٣) .

مثـــال (٥-١٣) :

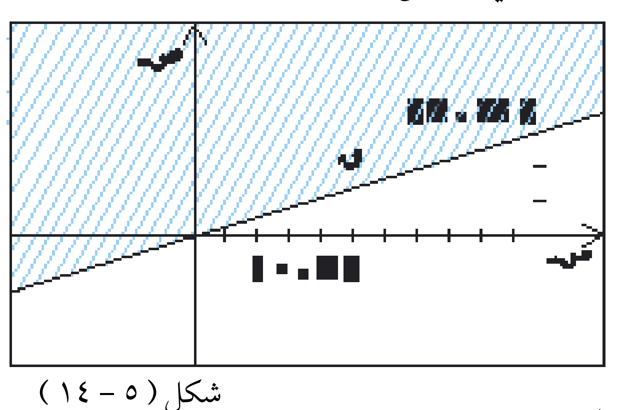
مثِّل حل المتباينة التالية في المستوي الإحداثي : ٣- س + ١١ ص ≤ ٠

الحـــــــــل :

في هذا المثال توجد إشارة مساواة في المتباينة لذا نرسم المستقيم :

٣-س + ١١ص = ٠ متَّصلاً كما في الشكل (٥ - ١٤).

الآن نختار نقطة ليست على المستقيم ل مثل (٣ ،٠) ونعوّض س = ٣ ، ص = ٠ في المقدار ٣-س + ١١ص فنحصل على - ٩ وهو عدد سالب .



شكل (٥ - ١٤)

إذن النقطة (٣ ، ٠) لا تحقِّق المتباينة المعطاة.

نستنتج أنَّ نصف المستوي المغلق الذي لا يحوي النقطة (٣ ، ٠) يمثِّل حلَّ المتباينة المعطاة ، وهو الجزء المظلَّل في الشكل (٥ - ١٤).

نظام المتباينات الخطِّية في متغيرين :

إذا كان لدينا عدد من المتباينات الخطِّية في متغيِّرين وأردنا إيجاد جميع الأزواج المرتَّبة (س ، ص) وفي ح × ح التي تحقِّق جميع المتباينات المعطاة في آن واحد ، فإنَّنا نسمِّي مجموعة المتباينات المعطاة نظام متباينات خطِّية في متغيَّرين ونسمِّي مجموعة الأزواج المرتَّبة التي تحقِّقها في آن واحد مجموعة حل نظام المتباينات .

نفرض أنَّ لدينا ن من المتباينات الخطِّية في متغيِّرين وأنَّ $ف_١$ هي مجموعة حل المتباينة الأولى في النظام و $ف_٢$ مجموعة حل المتباينة الثانية وهكذا... فلعلَّك تلاحظ أنَّ مجموعة حلّ النظام هي $ف_١ \cap ف_٢ .... \cap ف_ن$.

مــثـــــال (٥-١٤) :

مثِّل حل نظام المتباينتين التالي في المستوي الإحداثي :

٣ س + ٥ ص ≤ ١٥ (٥ − ١٣)

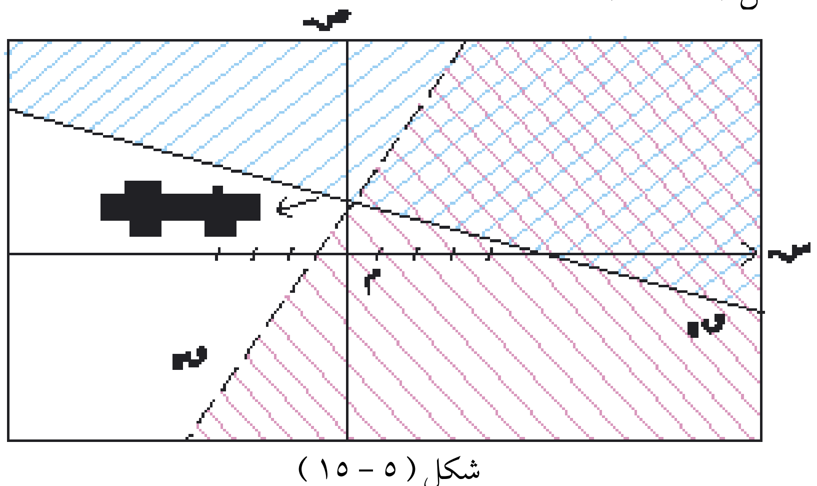
ص − ٢ س ٢− > ٠ (٥ − ١٤)

الحـــــــــل :

المتباينة (٥ − ١٣) تكافئ ٣ س + ٥ ص − ١٥ ≤ ٠

نرسم المستقيم ٣س + ٥ ص − ١٥ = ٠ متَّصلاً ونرمز له بالرمز ل١ .

أما المستقيم ص − ٢س − ٢ = ٠ فنرسمه منقَّطاً ونرمز له بالرمز ل٢ كما في الشكل (٥ − ١٥).



شكل (٥ − ١٥)

إن نقطة الأصل م لا تقع على أي من المستقيمين عند تعويض س = ٠ ، ص = ٠ في (٥ − ١٣) نستنتج أن الـزوج المرتَّـب (٠ ، ٠) لا يحقِّق المتـباينة لذا فإنَّ حلّ (٥ − ١٣) يمثِّله نصف المستوي المغلق المحدَّد بالمستقيم ل١ والذي لا يحوي م .

أما بالنسبة للمتباينة (٥−١٤) فإن الزوج المرتب (٠ ، ٠) يحقِّقها ، لذا فإنَّ حلَّها يمثِّله نصف المستوي المفتوح المحدّدَ بالمستقيم ل١ والذي يحوي م ، إنَّ تمثـيل حلّ

النظام هو تقاطع نصفي المستوي وهي المنطقة المخطَّطة كالشبكة في الشكل (٥-١٥) ضماناً لدقَّة تعيين منطقة الحل من المناسب إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ وهي ($\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{٣٦}{١٣}$) وذلك بحل النظام المكوَّن من معادلتي المستقيمين.

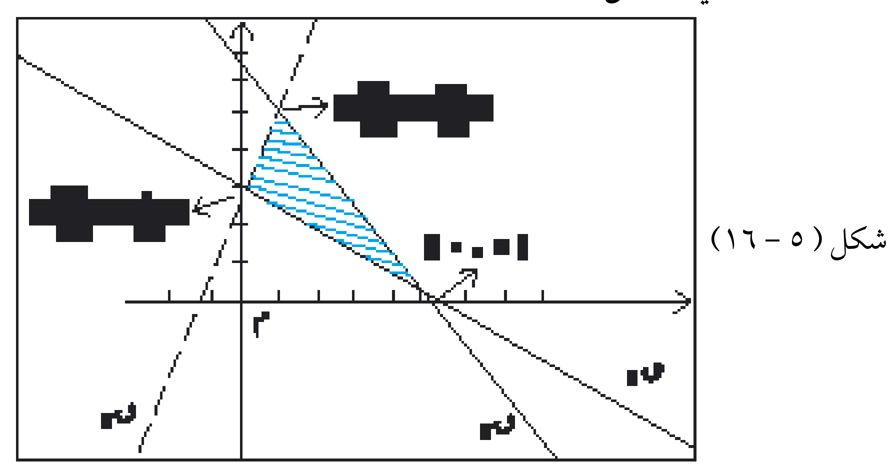
مثال (٥-١٥) :

مثِّل حل نظام المتباينات التالي :

٣س + ٥ ص ≥ ١٥	(٥ – ١٥)
ص ٢–س ٢– > ٠	(٥ – ١٦)
٧س + ٥ ص – ٣٥ ≤ ٠	(٥ – ١٧)

الحـل :

لقد سبق أن أوجدنا تمثيل حل المتباينتين الأولى والثانية في المثال السابق. بالنسبة للمتباينة (–٥ ١٧) نرسم المستقيم $ل_٣$ الذي معادلته ٧س + ٥ ص – ٣٥ = ٠ متصلاً كما في الشكل (٥-١٦) . لاحظ أن النقطة (٠ ، ٠) تحقق (٥ – ١٧) لذا فإن مجموعة حل المتباينة (٥ ١٧–) ممثَّلة بنصف المستوي المغلق المحدَّد بالمستقيم $ل_٣$ والحاوي على نطقة الأصل م . إنَّ مجموعة حلّ النظام في المثال هي تقاطع مجموعات حلّ كل من المتباينات (٥ – ١٥) ، (٥ – ١٦) (٥ – ١٧) وهي المجموعة الممثلة بالمنطقة المظلَّلة في الشكل (٥ – ١٦).



شكل (٥ – ١٦)

تمارين (٥ ــ ٢)

في التمارين (١) – (٤) مثِّل حلَّ المتباينات في المستوي الإحداثي :

(١) ٢س + ٥ص > ٢٠

(٢) $\frac{\text{س}}{٩} - \frac{\text{ص}}{٧} \leq ١٣$

(٣) ٢س – ١١ص > ص – ٢س + ٣٦

(٤) (س٣+ص)^{٢} ≤ س^{٢} –ص + ٣س ٦+س ص + ٩ص^{٢}

في التمارين (٥) – (١٣) مثِّل حلّ أنظمة المتباينات في المستوي الإحداثي:

(٥)
س – ص > ٥
ص + ٢س + ٤ > ٠

(٦)
٣ص + ٢س – ١٢ ≥ ٠
٥س – ص > ١٠

(٧)
ص – س >٠
٢س + ٢ص ≥ ١٢
ص > ٦ + ٢س

(٨)
س > ٠
ص >٠
ص + ٢س ≤ ٢
٢س + ٢ص > ٣

(٩)
س > ٣
ص > –٢
ص – س + ٣ ≤٠
ص + ٢س > ١٠

(١٠)
ص ≤ ٢س – ٢
ص + ٢ س + ٢ ≥ ٠
٣ص + س ≥ ٤

(١١)
س > ٠
ص > ٠
س + ص > ١
س + ٧ ص ≥ ٠

(١٢)
| س | ≥ ٤
ص – س > –٢

(١٣)
| س – ص | ≥ ٥
| ص – ١ | ≤ ٣

تمارين عامة على الباب الخامس

(١) حل المتباينة | ٣ - س | > ٥ ثم مثِّل الحل على خط الأعداد .

(٢) حل نظام المتباينتين :

س + ٢ ص > ٤ و س + ٢ص ≤ ١٠

(٣) حل نظام المتباينات :

٢س - ٧ص +١٣ >٠ ، ٣س+٤ص+٥ ≤ ٠، ٨س + ص - ٣٥ > ٠

(٤) برهن على صحة الخاصتين (١) ، (٢) من النظرية (٥ - ١).

(٥) تصدَّق محسن بمبلغ ٣٥٠٠٠ ريال على ١٥ عائلة فقيرة. فإذا أعطى لكل من العوائل السبع الأولى مبلغاً يتراوح بين ١٠٠٠ و ٢٠٠٠ ريال ففي أي مدى يقع ما يقدمه لكل من العوائل الثمان الباقية ؟

(٦) أوجد مجموعة الحل للنظام المؤلف من المتباينات التالية ومثِّل ذلك على خط الأعداد :

س - (س - ٣)/٢ > (٤ - س)/٥ ،

٢ - ٣س > ٢س - ٨ ٠

(٧) حل المتباينة (٥ - س)/(٢س - ١) ≤ ٠ ، س ≠ ١/٢

الباب السادس

حساب المثلّثات

- ٦ - ١ نبذة تاريخية.
- ٦ - ٢ الزوايا وقياسها .
- ٦ - ٣ الدوال المثلثية للزوايا الحادة .
- ٦ - ٤ العلاقة بين الدوال المثلثية والمثلث قائم الزاوية .
- ٦ - ٥ بعض العلاقات المثلثية .
- ٦ - ٦ الجداول المثلثية والحاسبات واستخداماتها .
- ٦ - ٧ حساب الارتفاعات والأبعاد .

٦ - ١ نبذة تاريخية :

كان لحساب المثلثات دور كبير في الحضارة الفرعونية عند بناء الأهرامات الثلاثة، كما كان له تأثير كبير على ملاحظاتهم الفلكية في ذلك الوقت . كذلك كان للبابليين اهتمام كبير بالفلك وبالتالي حساب المثلثات . كما اعتمد الإغريق على كثير من المعلومات التي وصلت إليهم من البابليين والمصريين وذلك عندما طوَّروا الساعة الشمسيّة أو ما يسمى بالمقياس الشمسي وذلك سنة ألف وخمس مئة قبل الميلاد.

يعرَّف حساب المثلثات على أنه «قياس المثلث»، علماً بأنه قديم قدم حاجة الإنسان ومعرفته بالفلك والهندسة. وبما أن قياس المثلث مفهوم يدخل تحت الهندسة وتطبق مفاهيمه في الفلك، فإن حساب المثلثات يتبع الهندسة والفلك حسب الاستخدام والحاجة حتى تم فصله كعلم مستقل بفضل علماء المسلمين خلال نهضة الحضارة الإسلامية وذلك في القرن الثالث الهجري.

كان اهتمام العلماء المسلمين بحساب المثلثات كمن سبقوهم مرتبطاً بالجانب التطبيقي له والمتعلق بعلم الفلك ، لذلك نجد أنَّهم قد اهتموا اهتماماً كبيراً بهذا العلم حتى أنهم نظموا وطوروا المعارف المتعلقة به حتي جعلوا منه علماً مستقلاً عن علم الفلك وأسموه «علم الأنساب» وذلك لأنه يقوم على النسب المختلفة الناشئة بين أضلاع المثلث .

من أبرز العلماء المسلمين الذين كان لهم دور كبير في تقدّم حساب المثلثات محمد ابن جابن بن سنان أبو عبد الله البتَّاني (٢٣٥ ـ ٣١٧هـ) ومحمد بن إسماعيل بن العباس أبو الوفاء البوزجاني (٣٢٨ ـ ٣٨٨هـ) . ومن أهم الإنجازات التي قام بها البتاني اكتشافه لقاعدة إيجاد ارتفاع الشمس .

يعتبر أبو الوفاء البوزجاني العالم المسلم الذي جعل علم حساب المثلَّثات يأخذ صفة العلم المستقل عن علم الفلك. كما يُعتبر نصير الدين الطوسي (٥٩٧ـ٦٧٢هـ) أوَّل من أظهر حساب المثلَّثات كعلم مستقلّ في كتابه «أشكال القطاعات».

مع إنجاز النهضة العلمية في المشرق برز علماء مسلمون في الأندلس ومن أشهرهم إبراهيم بن يحيى النقّاش المعروف بأبي إسحاق الذي أوجد مجموعة من الجداول الرياضية، وجابر بن فلاح. قام كل من النقّاش وجابر بحساب جداول الجيب وجيب التمام ، وقام أحمد بن عبد الله المعروف بعباس الحاسب بحساب أول جدول للظل وظل التمام .

٦ - ٢ الزوايا وقياسها :

سبق وأن تعرَّفت على مفهوم الزاوية في دراستك للهندسة في المرحلة المتوسطة، وقد رأيت أن « زاوية قطاع زاوي » هي الخاصة المشتركة بين هذا القطاع والقطاعات التي تتطابق معه .

ومن جهة أخرى فقد تعرَّفت في المرحلة المتوسطة على نظام لقياس الزاوية هو النظام الستّيني، ورأيت أنَّ :

الزاوية القائمة = ٩٠ درجة وتكتب على الشكل : °٩٠

كما رأيت أن الدرجة = °١ = ٦٠ دقيقة وتكتب على الشكل : ′٦٠

وأن الدقيقة = ′١ = ٦٠ ثانية وتكتب ″٦٠

وأن الدورة الكاملة = ٤ قوائم = °٣٦٠

كما تعرَّفت في الفصل الدراسي الأول ، في باب الهندسة ، على نظام آخر لقياس الزاوية هو «التقدير الدائري» وتعرَّفت على العلاقة بين النظامين وفق المعادلة :

$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{ى}{ط} \qquad (٦ - ١)$$

حيث س° هو قياس الزاوية بالدرجة، ء قياس الزاوية نفسها بالراديان ورأيت أن الراديان (أو : الزاوية نصف القطرية) هو قياس زاوية مركزيَّة تقابل قوساً من دائرة طوله مساوٍ لنصف قطر تلك الدائرة ، واستنتجت أنه إذا كان ل طول قوسٍ من الدائرة (م ، ىٓ) وكانت زاويته هـ راديانا فإن :

$$ل = هـ . ىٓ \qquad (٦ - ٢)$$

نورد فيما يلي بعض الأمثلة على سبيل التذكير والمراجعة.

مثـال (٦-١) :

(أ) حوّل من الدرجة إلى الراديان : ٣٠° ، ٦٠° ، ١٥٠° ، ٣٦٠°

(ب) حوّل من الراديان إلى الدرجة : $\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{ط}{٢}$ ، ط راديانا .

الحـــــــل :

باستخدام (٦ – ١) نجد :

(أ) $\frac{٣٠°}{١٨٠°} = \frac{ء}{ط} \Leftarrow ء = \frac{ط}{٦}$ راديانا.

$٦٠° = ٢ \times ٣٠° = \frac{ط}{٣}$ راديانا .

$١٥٠° = ٥ \times ٣٠° = \frac{٥ط}{٦}$ راديانا .

$٣٦٠° = ٦ \times ٦٠° = ٢ط$ راديانا .

(ب) $\frac{س°}{١٨٠°} = \frac{\frac{ط}{٤}}{ط} \Leftarrow س = ٤٥°$

$\frac{ط}{٢} = ٢ \times \frac{ط}{٤} = ٢ \times ٤٥° = ٩٠°$

$= ٢ \times \frac{ط}{٢} = ١٨٠°$

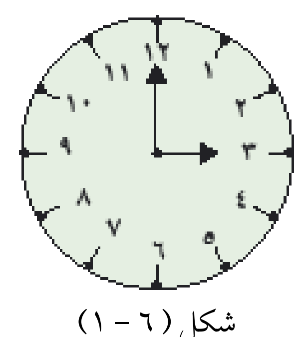
مثـال (٦-٢) :

كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال خمس دقائق، كان طول هذا العقرب ٢١ سم . (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحـــــــــل :

يدور عقرب الدقائق دورة كاملة خلال ساعة واحدة (أي ٦٠ دقيقة زمنية)

وعليه فإن الزاوية التي يدورها خلال ٥ دقائق :



شكل (٦ – ١)

هـ = $\frac{٣٦٠}{٦٠}$ × ٥ = ٣٠°

= $\frac{ط}{٦}$ راديانا .

ومن (٦ – ٢) نجد أن :

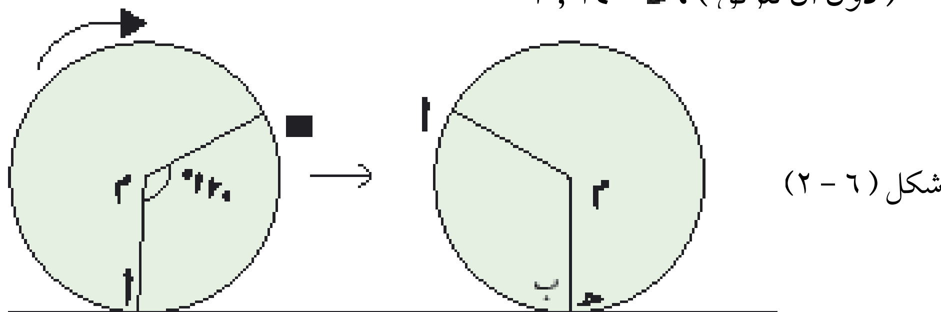
ل = هـ × نق = $\frac{ط}{٦}$ × ٢١

= $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{٢١}{٦}$ = ١١سم ـ انظر الشكل (٦ – ١) .

مثـال (٦-٣) :

عربة شحن طول قطر عجلتها متر واحد، ما طول المسافة التي تقطعها الشاحنة عندما تدور عجلتها $\frac{١}{٣}$ دورة ؟ دورة واحدة؟ ٢١,٧ دورة ؟

(دون أن تنزلق) ، ط = ٣,١٤



شكل (٦ – ٢)

الحـــــــــــل :

من الشكل (٦ - ٢) :

عندما تدور العجلة $\frac{١}{٣}$ دورة أي ١٢٠° = $\frac{٢ط}{٣}$ رادياناً .

تقطع الشاحنة المسافة |أ حـ| التي تساوي طول القوس [$\overset{\frown}{أب}$]

ويكون |أ حـ| = |$\overset{\frown}{أب}$| = $\frac{٢ط}{٣}$ × نـ حسب (٦ - ٢)

= $\frac{٢ × ٣,١٤}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ = ١,٠٥ م .

وعندما تدور العجلة دورة كاملة تقطع الشاحنة مسافة تساوي محيط العجلة

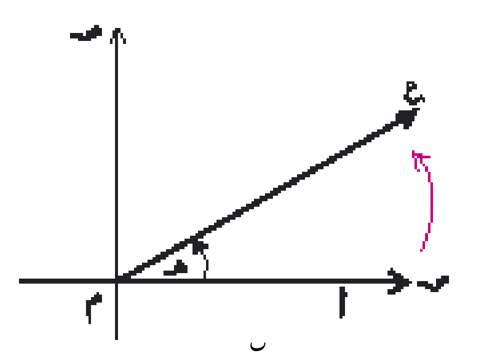
= ٢ ط نـ

= ٢ × ٣,١٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٣,١٤ م .

وعندما تدور العجلة ٢١,٧ دورة تقطع الشاحنة مسافة تساوي :

٢١,٧ × ٣,١٤ = ٦٨,١٤ م .

الـزاويــة الموجَّــهــة :



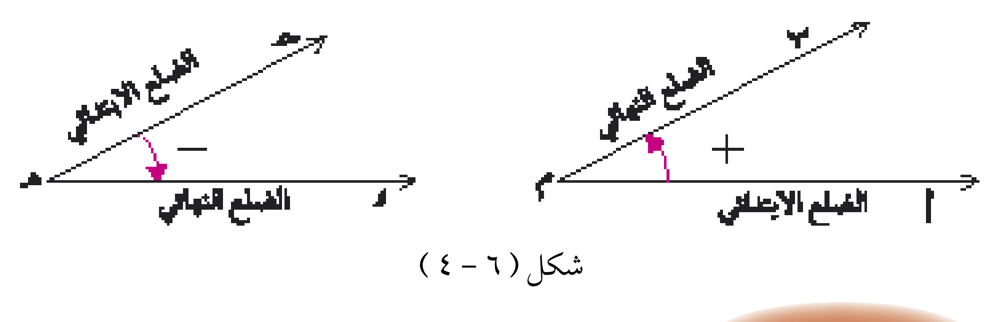
١) قبل أن نختم هذا البند نتعرَّف على الزاوية الموجَّهة.

ففي الشكل (٦ - ٣) المستوي منسوب إلى نظام إحداثي متعامد

الزاوية أ$\hat{م}$ب = هـ ضلعها [م أ ثابت، بينما ضلعها [م ب يدور وفق اتجاه السهم الأحمر ابتداءً من وضع انطباقه على [م أ ، وحيث إننا سنتعامل في هذا الباب مع الزوايا الحادَّة، فإن هـ ستأخذ جميع قيم الفترة [٠ ، ٩٠°].

حسب معلوماتك في المرحلة المتوسطة ، لعلَّك تذكر أن الجهة المعيَّنة بالسهم الأحمر في الشكل (٦ - ٣) هي الجهة الموجبة للدوران، بينما الجهة المعاكسة هي الجهة السالبة للدوران .

إن الزاوية المكوَّنة من الزوج المرتَّب ([م أ ، [م ك) ندعوها **زاوية موجَّهة** ضلعها الابتدائي [م أ وضلعها النهائي [م ك . في الشكل (٦ - ٤) :
الزاوية الموجَّهة المكوَّنة من الزوج المرتَّب ([م أ ، [م ب) موجبة بينما الزاوية الموجَّهة المكوَّنة من الزوج المرتَّب ([هـ حـ ، [هـ د) سالبة



شكل (٦ - ٤)

تدريب (٦-١) :

(١) أي اتجاه للدوران تتبع :
(أ) في طوافك حول الكعبة المشرَّفة ؟
(ب) في فتح حنفية الماء ؟
(جـ) في فتح اسطوانة الغاز ؟
(٢) ما نوع دوران عقارب الساعة ؟

٢) إذا كان لدينا نظام إحداثي متعامد كما في الشكل (٦ - ٥) فإننا نقول عن الزاوية الموجَّهة إنها في وضع قياسي إذا وقع رأسها في نقطة الأصل وانطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات.

في الشكل (٦ – ٥) الزاوية الموجَّهة المكوَّنة من الزوج المرتَّب ([م أ ، [م جـ) في وضع قياسي

بينما كل من الزوايا الموجَّهة المكوَّنة من الأزواج المرتَّبة :

([م جـ ، [م أ) ، ([م جـ ، [م ب) ،

([م ب ، [م جـ) ليست في وضع قياسي.

شكل (٦ – ٥)

تدريب (٦-٢) :

أي الزوايا الموجَّهة المعينة في الأزواج المرتَّبة في الشكل (٦-٦) في وضع قياسي ولماذا ؟

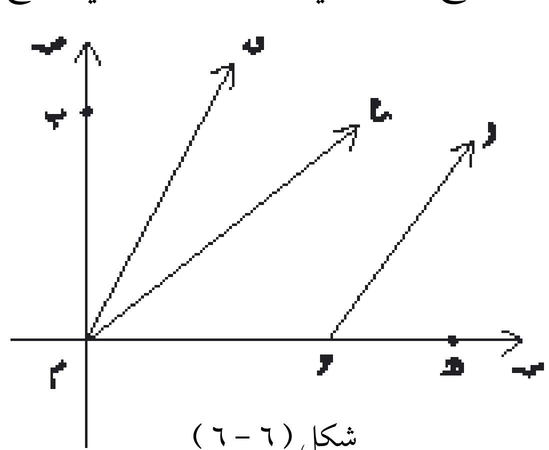
(أ) ([م و ، [م جـ)

(ب) ([و هـ ، [و ز)

(جـ) ([م هـ ، [م ن)

(د) ([م ن ، [م ب)

(هـ) ([م هـ ، [م ب)



شكل (٦ – ٦)

تمارين (٦ ــ ١)

١) عبِّر عن قياس كل زاوية فيما يأتي بالراديان :

(أ) ٧٠°　　(ب) ٧٥°　　(جـ) ١٢٠°

(د) ١٣٥°　　(هـ) ١٢° ٣٠َ　　(و) ٣٣٠°

٢) حوِّل من راديان إلى درجة :

(أ) $\frac{٣ط}{٤}$ (ب) $\frac{٤ط}{٣}$ (حـ) $\frac{٣ط}{٢}$

(د) $\frac{٢ط}{٣}$ (هـ) $\frac{٥ط}{٦}$ (و) $\frac{٥ط}{١٢}$

٣) كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ٥ دقائق إذا كان طول العقرب ٤,٨ سم ؟ ط = $\frac{٢٢}{٧}$

٤) قمر صناعي يدور حول الأرض على مسار دائري دورة كاملة كل ٦ ساعات. فإذا كان نصف قطر مساره ٧٠٠٠ كم فأوجد سرعته في الدقيقة.

٥) إذا اعتبرنا خط الاستواء دائرة نصف قطرها ٦٥٠٠ كلم فأوجد طول القوس من خط الاستواء الذي يقابل زاوية مركزية قدرها ثانية واحدة . (قرِّب الجواب إلى رقمين عشريين من الكيلومترات) .

٦) الميل البحري هو طول القوس على خط الاستواء الذي يقابل زاوية مركزية قدرها دقيقة واحدة .

أوجد ما يساويه الميل البحري بالكيلومترات باعتبار خط الاستواء دائرة نصف قطرها ٦٥٠٠ كلم، قرِّب الجواب إلى رقمين عشريين.

٧) أوجد المسافة التي تقطعها عجلة إذا كان قطرها وعدد دوراتها كما يلي :

(استعمل ط = ٣,١٤)

أ) ٢٥ سم ، ٢,٥ دورة ب) ٣,٥ متر ، ٤,٢ دورة

حـ) ٦ أمتار ، ٧,٧ دورة د) ١٠ أمتار، ٦,   دورة

٨) أوجد نصف قطر عجلة عندما تكون المسافة التي قطعتها وعدد دوراتها كما يلي:

(استعمل ط = ٣,١٤)

أ) ٦٣ سم ، ٥ دورات ب) ٩٦,٣ متر ، ٩ دورات

حـ) ٦٧,٥٣ متر ، ٧ دورات د) ٨١,٦٥ متر ، ٦,٥ دورة

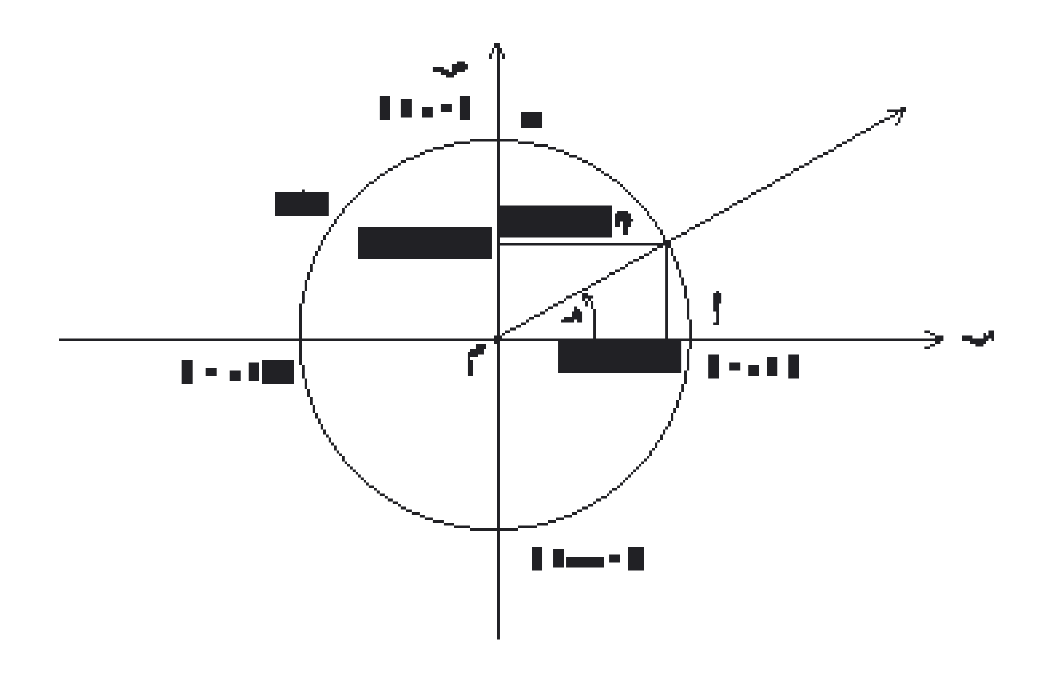
٦ ـ ٣ الدوال المثلثية للزوايا الحادَّة :

إذا رسمنا دائرة (د) مركزها نقطة الأصل م ، ونصف قطرها وحدة الطول فإننا نسميها دائرة الوحدة أو (الدائرة المثلثية) كما في الشكل (٦ - ٧) . معادلة الدائرة (د) هي :

$$س^٢ + ص^٢ = ١$$

ولو رسمنا الزاوية $\hat{أ م هـ}$ بوضع قياسي، وكانت النقطة هـ(س ، ص) نقطة تقاطع دائـرة الوحدة (د) مع الضلع النهائي للزاويـة، وكان قياس الزاويـة $\hat{أ م هـ}$ = هـ

فإن قيمتي س ، ص تتبعان للعدد هـ . ومن الواضح أنه إذا كانت ٠° ≤ هـ < ٩٠°،



شكل (٦ - ٧)

تعـــريــــف (٦-١):

إذا كانت $\hat{أم هـ}$ زاويـة حـادَّة قيـاسـها هـ في الوضـع القـياسـي وكانـت هـ (س ، ص) نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة فإنَّنا نعرف الدالتين الآتيتين :

جتا : [٠ ، ٩٠°) ⟵ (٠ ، ١] هـ ⟵ س = جتا هـ

جا : [٠ ، ٩٠°) ⟵ [٠ ، ١) هـ ⟵ ص = جا هـ

ونعبِّر عن قيمة هاتين الدالتين بالنسبة لزاوية هـ بالرمز جتا هـ (ويقرأ « جيب تمام الزاوية هـ ») وجا هـ (ويقرأ « جيب الزاوية هـ »).

ملحوظة (٦ - ١) :

لو وسَّعنا مجال الدالتين جتا، جا بحيث يصبح [٠ ، ٩٠] لأمكننا ملاحظة ما يلي:

١) عندما هـ = ٠ فإن هـ تنطبق على أ (١ ، ٠) أي أن :

جتا ٠ = ١ ، جا ٠ = ٠

(٦ – ٣)

٢) عندما هـ = $\frac{ط}{٢}$ (أي ٩٠°) فإن هـ تنطبق على ب (٠ ، ١) أي أن :

جتا ٩٠° = ٠ ، جا ٩٠° = ١

(٦ – ٤)

مثـال (٦-٤) :

ارسم زاوية قياسها ٤٥° في الوضع القياسي، ثم أوجد جتا ٤٥° وجا ٤٥° مستعيناً بدائرة الوحدة .

الحــــــــل :

في الشكل (٦ – ٨) $\hat{أم هـ}$ = ٤٥°

هـ ∋ (د) (دائرة الوحدة)

⇐ | م هـ | = ١

هـ (س، ص) = هـ (جتا ٤٥

$س^٢ + ص^٢ = ١$ (٦ – ٥)

△ م هـ هـ قائم الزاوية

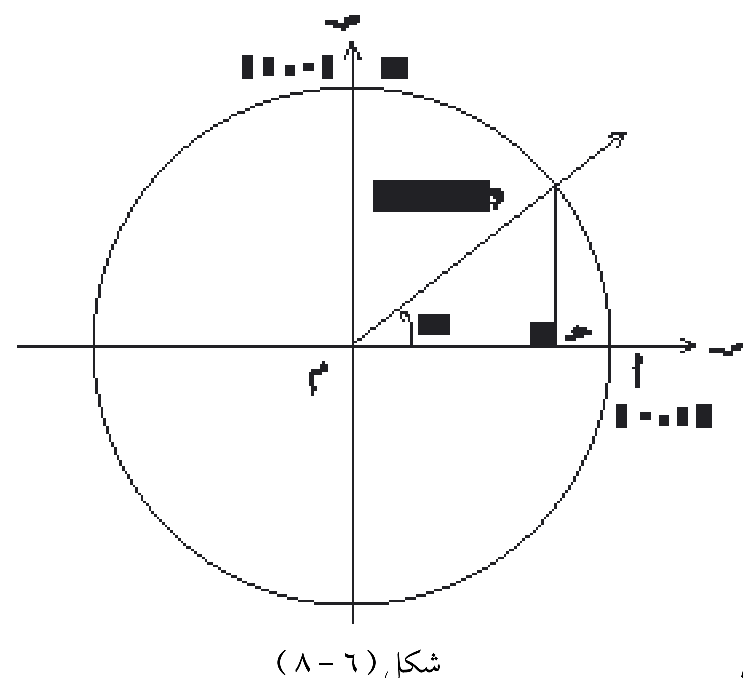
في هـ ومتطابق الضلعين

⇐ س = ص

نعوض في (٦ – ٥) فنـ

$س^٢ + س^٢ = ١$

⇐ $٢س^٢ = ١$ ، س > ٠



شكل (٦ – ٨)

⇐ $س = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ وهذا يعني أن $جتا ٤٥^\circ = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

وحيث س = ص فإن $جا ٤٥^\circ = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

دالّتان أخريان :

كما أن هناك دالّتين أخريين هما دالّتا الظل ونرمز لها بالرمز **ظا** وظل التمام ونرمز لها بالرمز **ظتا** وقيمتا هاتين الدالتين من أجل زاوية حـادة قياسها هـ ـ انظر الشكل (٦ – ٧) ـ هما :

$ظا هـ = \frac{ص}{س}$ س ≠ ٠ (٦ – ٦)

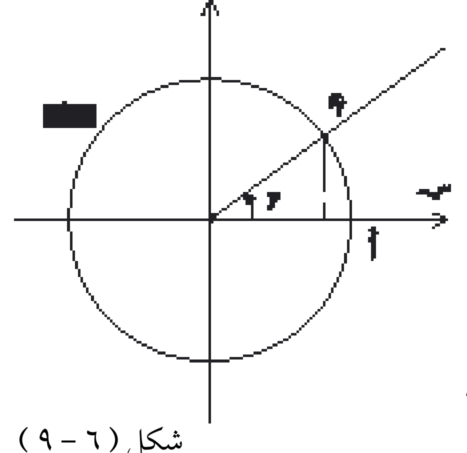
$ظتا هـ = \frac{س}{ص}$ ص ≠ ٠ (٦ – ٧)

مثـال (٦-٥) :

في الشكل (٦ – ٩) النقطة هـ (٠,٨ ، ٠,٦) ، أثبت أن هـ تنتمي لدائرة الوحدة، وإذا كانت $\hat{\text{أ م هـ}}$ = هـ فأوجد :

جتا هـ ، جـا هـ ، ظـا هـ ، ظتا هـ

الحـــــــل :



شكل (٦ – ٩)

لكي تنتمي هـ لدائرة الوحدة

يجب أن يحقِّق إحداثيا هـ

معادلة دائرة الوحدة : $س^2 + ص^2 = ١$

بالتعويض نجد :

$(٠,٨)^2 + (٠,٦)^2 = ٠,٦٤ + ٠,٣٦$

⟸ هـ تقع على دائرة الوحدة وعليه فإن :

جتا هـ = س = ٠,٨ ، جـا هـ = ص = ٠,٦

ظـا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٠,٦}{٠,٨} = \frac{٣}{٤}$ ، ظتا هـ = $\frac{س}{ص} = \frac{٠,٨}{٠,٦} = \frac{٤}{٣}$

نتيجة (٦ - ١) :

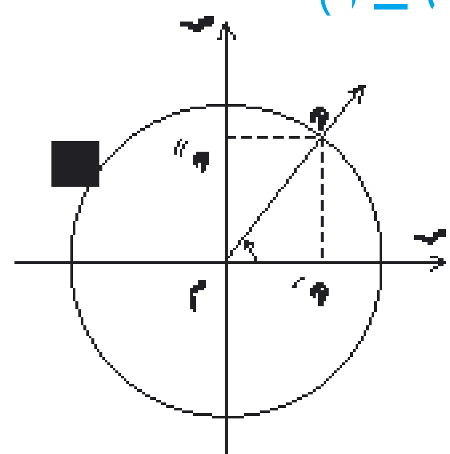
من (٦ – ٦)، (٦ – ٧) نستنتج أن ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظـا هـ}}$

تدريب (٦-٣) :

١) في المثال (٦–٥) أوجد ميل [م هـ ثم قارن بين ميل [م هـ وظا هـ، ماذا تلاحظ؟

٢) ارسم الشكل (٦ – ٩) بدقَّة متخذاً ٣سم وحدةً لقياس الطول ثم استعمل المنقلة لقياس الزاوية هـ .

تمـــــاريـــن (٦ ــ ٢)



(١) في الشكل بجانبه ، الدائرة (د)

دائرة الوحدة ، | م هـ | = $\frac{٣}{٥}$ وحدة الـ

أوجـد :

جتا هـ ، جـا هـ ، ظـا هـ ، ظتا هـ

(٢) أعد حل التمرين السابق إذا كان

| م هـ | = $\frac{٥}{١٣}$ وحدة الطول .

(٣) إذا علمت أن س زاوية حادة وأن جتا س = $\frac{١}{٢}$

فارسم الزاوية س بوضع قياسي في دائرة الوحدة ثم أوجد :

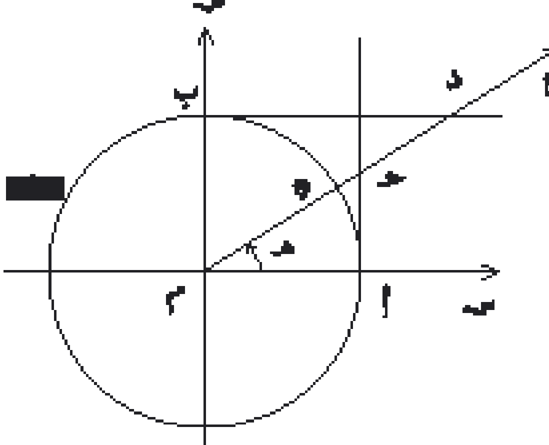
جـا س ، ظـا س ، ظتا س

ارسم الشكل بدقَّة ثم أوجد قياس س مستعيناً بالمنقلة .

(٤) أثبت أن النقطة هـ ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$) تقع على دائرة الوحدة وإذا مر بالنقطة هـ

الضلع النهائي لزاوية حادة قياسها هـ وكانت في وضع قياسي، فأوجد قيم :

جـا هـ ، جتا هـ ، ظـا هـ ، ظتا هـ



(٥) تقع النقطة هـ (س ، ص)

على دائرة الوحدة (د)

] أ حـ ،] ب د مماسان

للدائرة، كما في الشكل المقابل .

(أ) تحقق أن : | أ حـ | = ظـا هـ

| ب د | = ظتا هـ

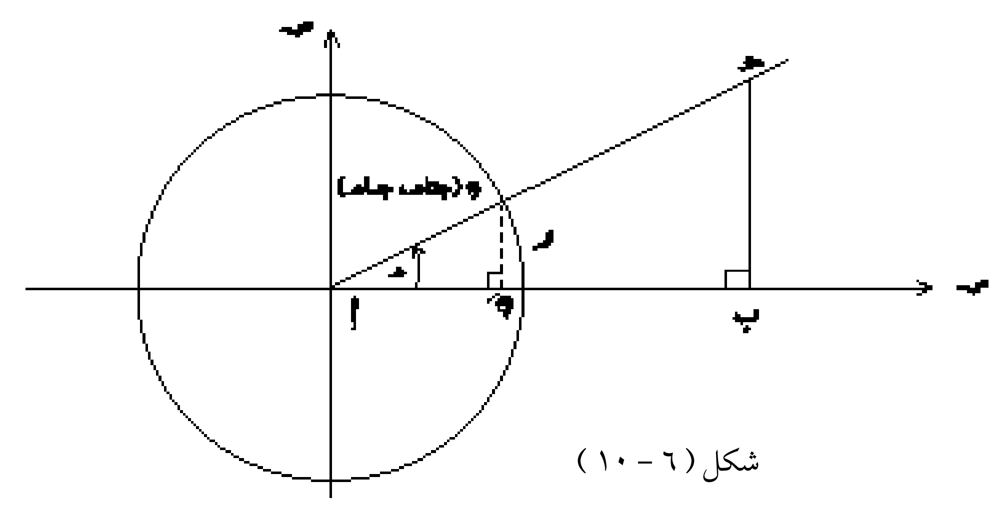
(ب) إذا دار الضلع [م ج مقترباً من [م س ماذا سيحصل للنقطة جـ ؟

(جـ) إذا دار الضلع [م ج بالاتجاه المعاكس مقترباً من [م س ماذا سيحصل للنقطة د ؟

٦ - ٤ العلاقة بين الدوال المثلّثية والمثلث قائم الزاوية :

هناك بعض العلاقات الهامة في المثلث القائم لها أهميَّة في الدراسات التطبيقية : كالميكانيك والفيزياء والعلوم الهندسية.

في الشكل (٦ - ١٠) المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب . الزاوية ب $\hat{أ}$ جـ في وضع قياسي وقياسها هـ ، أ تنطبق على نقطة الأصل، نرسم دائرة الوحدة (د) مركزها أ . فتقطع الضلعين [أ ب] ، [أ جـ] في ر ، هـ على الترتيب .



شكل (٦ - ١٠)

و (١ ، ٠) ، هـ (س ، ص) = هـ (جتا هـ ، جـا هـ) ، هـَ (جتا هـ ، ٠) من تشابه المثلثين أ هـَ هـ ، أ ب جـ نجد :

$$\frac{|أ هَـ|}{|أ ب|} = \frac{|أ هـ|}{|أ جـ|} = \frac{|هَـ هـ|}{|ب جـ|}$$

أو : $\frac{\text{جتا هـ}}{|\text{أب}|} = \frac{1}{|\text{أهـ}|} = \frac{\text{جا هـ}}{|\text{ب هـ}|}$

من النسبتين الأولى والثانية ينتج : جتا هـ = $\frac{|\text{أب}|}{\quad}$

ومن النسبتين الثانية والثالثة ينتج : جا هـ = $\frac{|\text{ب هـ}|}{\quad}$

وبالتالي فإن : ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{|\text{هـَ هـ}|}{|\text{أهـ}|} = \frac{|\text{ب هـ}|}{|\text{أب}|}$ (لماذا؟)

إن [أهـ] ، كما تعلم ، هو وتر المثلث أ ب هـ القائم في ب : نسمي [ب هـ] الضلع المقابل للزاوية أ التي قياسها [أب] الضلع المجاور للزاوية أ التي قياسها هـ .

وهكذا نحصل على قيم الدوال المثلثية لزاوية حادَّة قياسها هـ من مثلث قائم الزاوية ـ كما في الشكل (٦ – ١١) ـ على النحو التالي :

جا هـ = $\frac{\text{طول الضلع القائم المقابل للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$ أو اختصاراً :

جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ (٦ – ٨)

وكذلك : جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ (٦ – ٩)

ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ (٦ – ١٠)

شكل (٦ – ١١)

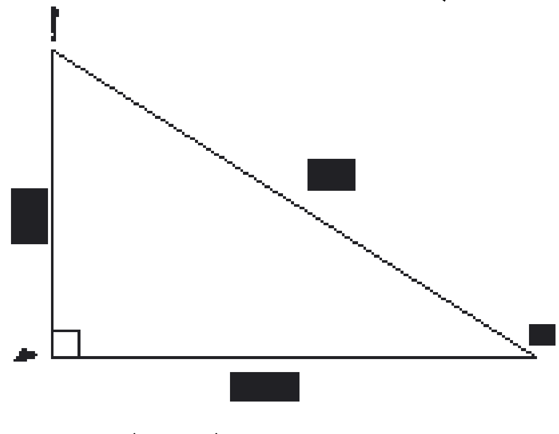
ومن النتيجة (٦ – ١) نجد أن ظتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ (٦ – ١١)

وتجدر الإشارة إلى أن قيم الدوال المثلثية في المثلث القائم نطلق عليها (النسب المثلثية) وذلك لأنها نسب بين أطوال أضلاع المثلث القائم .

مثـال (٦-٦) :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ فيه | أ جـ | = ٥ سم ، | ب جـ | = ١٢ سم،

احسب قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة ب .



الحــــــــــــل :

| أ ب |^{٢} = | ب جـ |^{٢} + | أ جـ |^{٢}

= ١٤٤ + ٢٥

= ١٦٩

⇐ | أ ب | = ١٣ سم

جـا ب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٥}{١٣}$ من (٦ – ٨)

جتا ب = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{١٢}{١٣}$ من (٦ – ٩)

ظـا ب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٥}{١٢}$ من (٦ – ١٠)

ظتا ب = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{١٢}{٥}$ من (٦ – ١١)

تـــمــــاريــــن (٦ ــ ٣)

(١) إذا كانت جـ زاوية حادة وكان جتا جـ = $\frac{١}{٢}$ ، فاحسب قيم النسب المثلثية الأخرى.

(٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه | أ ب | = ٣سم ، | ب جـ | = ٤سم

أوجـد :

(أ) | أ جـ | (ب) جـا جـ ، جتا جـ ، ظـا جـ ، ظتا جـ

(٣) مثلث أ ب حـ قائم في ب فيه | أ ب | = ٦ سم ، جتا أ = $\frac{٣}{٥}$

(أ) ارسم المثلث أ ب حـ بدقـة

(ب) احسب طول كلٍّ من الوتر والضلع [ب حـ] ثم احسب النسب المثلثية للزاوية المقابلة للضلع الأصغر.

(٤) عيِّن في المستوي الإحداثي المتعامد النقطتين أ(٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ٦) ثم احسب جـا أ $\hat{م}$ أَ ، جا ب $\hat{م}$ بَ حيث أَ ، بَ مسقطا أ ، ب على المحور السيني ، على الترتيب ، ماذا تلاحظ ؟

(٥) أ ب حـ مثلث قائم في ب . أثبت أن :

(أ) | أ ب | = | أ حـ | جتا أ

(ب) |ب حـ | = | أ حـ | جـا أ = | أ ب | ظـا أ

(٦) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٨ سم ، وطول أحد ضلعيه القائمين ٦ سم .

(أ) احسب طول ضلعه القائم الآخر .

(ب) احسب قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة الصغرى .

(حـ) احسب قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة الكبرى .

(ء) ما العلاقة بين قيم النسب المثلثية للزاويتين الحادتين الصغرى والكبرى؟

(٧) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه | أ ب | =١٢ سم ، |ب حـ |= ٥ , ٣سم:

(أ) أوجد | أ حـ |

(ب) احسب قيم النسب المثلثية للزاوية حـ

(حـ) أثبت أن : ظـا حـ = $\frac{\text{جـا حـ}}{\text{جتا حـ}}$ ، جـا^{٢} حـ + جتا^{٢} حـ = ١

إرشاد : (جـا حـ)^{٢} = جـا^{٢} حـ ، وكذلك (جتا حـ)^{٢} = جتا^{٢} حـ

٦ - ٥ بعض العلاقات المثلّثية :

أ) العلاقة بين النسب المثلثية لزاويتين متتامّتين :

نُعرِّف الزاويتين المتتامَّتين على أنهما الزاويتان اللّتان مجموعهما °٩٠. فإذا كانت الزاوية الحادّة قياسها هـ°، يكون قياس متمّمتها (°٩٠ ـ هـ°)، وتعلم أن كل مثلث قائم زاويتاه الحادتان متتامتان، في الشكل (٦ – ١٢) المثلث أ ب هـ قائم في ب ، قياس زاويته $\hat{أ}$ = هـ° فيكون قياس $\hat{هـ}$ = °٩٠ – هـ° وعليه فإن :

جا هـ° = $\frac{|ب هـ|}{|أ هـ|}$ من (٦ – ٨)

جتا (°٩٠ – هـ°) = $\frac{|ب هـ|}{|أ هـ|}$ من (٦ – ٩)

فينتج أن : جتا (°٩٠ ـ هـ°) = جا هـ° (٦ – ١٢)

وكذلك فإن : جتا هـ° = $\frac{|أ ب|}{|أ هـ|}$ ، جا (°٩٠ – هـ°) = $\frac{|أ ب|}{|أ هـ|}$

فينتج أن : جا (°٩٠ ـ هـ°) = جتا هـ° (٦ – ١٣)

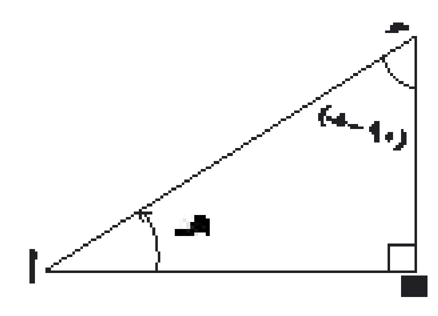
وأيضاً نجد أن : ظا (°٩٠ ـ هـ°) = ظتا هـ° (٦ – ١٤) ، لماذا ؟

وكذلك : ظتا (°٩٠ ـ هـ°) = ظا هـ° (٦ – ١٥) ، لماذا ؟

من ذلك ينتج أنَّه :

إذا كانت الزاويتان متتامَّتين فإنَّ :

جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى وبالعكس وظل إحداهما يساوي ظل تمام الأخرى وبالعكس .

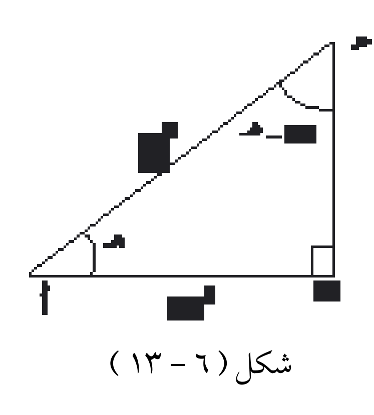


شكل (٦ – ١٢)

مثـال (٦-٧) :

زاوية حادة قياسها هـ°، حيث جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، احسب قيم النسب المثلثية للزاوية (٩٠° – هـ°)

الحـــل :


شكل (٦ – ١٣)

نرسم مثلثاً قائماً أ ب هـ طول ضلعه القائم [أ ب] يساوي ٤ سم وطول وتره [أ هـ] يساوي ٥ سم، كما في الشكل (٦ – ١٣)، فيكون :

|ب هـ|^{٢} = |أ هـ|^{٢} – |أ ب|^{٢}

= ٢٥ – ١٦ = ٩

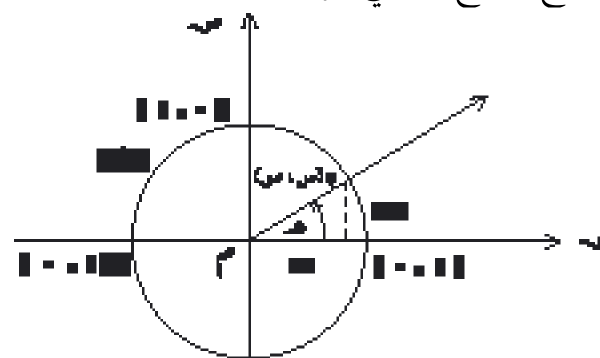
⇐ |ب هـ| = ٣سم

جا (٩٠° – هـ) = $\frac{٤}{٥}$ = جتا هـ ، جتا (٩٠° ـ هـ) = $\frac{٣}{٥}$ = جا هـ

ظا (٩٠ ـ هـ) = $\frac{٤}{٣}$ = ظتا هـ ، ظتا (٩٠ ـ هـ) = $\frac{٣}{٤}$ = ظا هـ

ب) المتطابقتان الأساسيتان :

في الشكل (٦ – ١٤) الزاوية الحادة هـ في الوضع القياسي، ﻫ (س ، ص) نقطة تقاطع دائرة الوحدة (د) مع الضلع النهائي للزاوية، لذلك فإن :



س^{٢} + ص^{٢} = ١ (٦ -

وحيث إنَّ :

(س ، ص) = (جتا هـ ، جا

لكل هـ ∋] ٠ ، ٩٠°)

لذا نعوِّض في (٦ – ١٦)

فنجد أنَّ :

$(جا هـ)^٢ + (جتا هـ)^٢ = ١$ لكل هـ ∈ [٠°، ٩٠°)

وتكتب عادة (جتا هـ)^٢ على الشكل جتا^{٢}هـ ، (جا هـ)^٢ على الشكل جا^{٢}هـ

فيكون لكل هـ ∈ [٠°، ٩٠°) :

$$\boxed{جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ = ١} \qquad (٦ - ١٧)$$

وحيث أن ظا هـ $= \frac{ص}{س}$ ، فإن :

$$\boxed{ظا هـ = \frac{جا هـ}{جتا هـ}} \qquad (٦ - ١٨)$$

العلاقتان (٦ - ١٧) ، (٦ - ١٨) تسمَّيان العلاقتين الأساسيَّتين في حساب المثلثات . وسبب هذه التسمية هو أن العلاقات المثلثية الأخرى تعتمد عليهما .

مثـال (٦-٨) :

إذا كانت هـ زاوية حادة حيث : جا هـ $= \frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا هـ ، ظا هـ ، ظتا هـ

الحـــــل :

جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ فيكون : جتا^{٢}هـ = ١ − جا^{٢}هـ

وبالتعويض : جتا^{٢}هـ $= ١ - \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢ = \frac{٩}{٢٥}$

جتا هـ $= \pm \frac{٣}{٥}$

ولكن ٠ < جتا هـ ≥ ١ حسب التعريف (٦ − ١) فيكون : جتا هـ $= \frac{٣}{٥}$

$$ظا هـ = \frac{جا هـ}{جتا هـ} = \frac{\frac{٤}{٥}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٤}{٣}$$

$$ظتا هـ = \frac{١}{ظا هـ} = \frac{٣}{٤}$$

تمارين (٦ ـ ٤)

(١) إذا كانت هـ زاوية حادة، وكانت جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، فاحسب جتا هـ، ظا هـ، ظتا هـ .

(٢) إذا كان ظا هـ = $\frac{٢}{٥}$ فما قيمة النسبة : $\frac{\text{جا هـ + جتا هـ}}{\text{جتا هـ - جا هـ}}$ ؟

(٣)

(أ) اقسم جميع حدود المساواة : جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ على جا^{٢}هـ واستنتج العلاقة التالية :

$$١ + \text{ظتا}^{٢}\text{هـ} = \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}$$

(ب) كيف نحصل على العلاقة التالية :

$$١ + \text{ظا}^{٢}\text{هـ} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$$

(هـ) احسب ظا هـ إذا كان : جا هـ = $\frac{٢}{٧}$

(٤) إذا كان : ظا ٣١° = ٠,٦

فاحسب قيم النسب المثلثية الأخرى لهذه الزاوية وقيم النسب المثلثية للزاوية المتمِّمة لها .

(٥) إذا كان جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، فاحسب قيم النسب المثلثية الأخرى لهذه الزاوية، وقيم النسب المثلثية للزاوية المتمِّمة لها.

(٦) ما قيمة الزاوية الحادة هـ التي تحقق المعادلة التالية :

$$٢ \text{ جا}^{٢}\text{هـ} = ١ \text{ ؟}$$

(٧) أكمل الجدول التالي :

هـ	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°
جا هـ	٠	٠,٥		٠,٨٦٦	١
جتا هـ			٠,٧٠٧		
ظا هـ					
ظتا هـ					

٦ - ٦ الجداول المثلثية والحاسبات واستخداماتها :

أ) النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصَّة

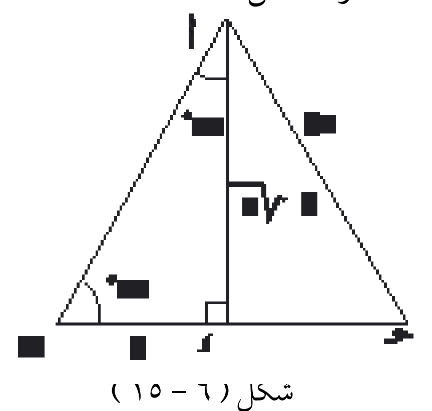
هناك زوايا خاصة كثيرة الاستعمال ، من المفيد معرفة نسبها المثلثية نخص منها الزوايا : ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°

أ) بالرجوع إلى المثال (٦ – ٤) نجد أننا قد حصلنا على النسب المثلثية للزاوية ٤٥° وهي :

$$\text{جا } ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \text{جتا } ٤٥^\circ \quad (٦ - ١٩)$$

$$\text{ظا } ٤٥^\circ = ١ = \text{ظتا } ٤٥^\circ \quad (٦ - ٢٠)$$

ب) بالنسبة للزاويتين الحادتين ٣٠° ، ٦٠° نرسم مثلثاً متطابق الأضلاع أ ب هـ ونرسم أحد ارتفاعاته وليكن [أ ء] مثلاً، انظر الشكل (٦ – ١٥).


شكل (٦ – ١٥)

إذا فرضنا أن | أ هـ | = ٢ ل

فإن | هـ ء | = ل (لماذا ؟)

ويكون في المثلث القائم أ هـ ء :

| أ ء |^{٢} = | أ هـ |^{٢} – | هـ ء |^{٢}

= ٤ ل^{٢} – ل^{٢}

= ٣ ل^{٢}

$\Leftarrow$ |أ ء| = ل $\sqrt{٣}$. ومن الشكل نجد أن :

$$جا ٦٠^\circ = جتا ٣٠^\circ = \frac{ل \sqrt{٣}}{٢ ل} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \quad (٦ - ٢١)$$

$$جتا ٦٠^\circ = جا ٣٠^\circ = \frac{١}{٢} \quad (٦ - ٢٢)$$

$$ظا ٦٠^\circ = ظتا ٣٠^\circ = \sqrt{٣} \quad (٦ - ٢٣)$$

$$ظتا ٦٠^\circ = ظا ٣٠^\circ = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣} \quad (٦ - ٢٤)$$

ب) استخدام الجداول المثلثية :

من الممكن أن نحصل على النسب المثلثية لأي زاوية معطاة بطريقة الرسم والقياس. النتائج التي نحصل عليها تكون تقريبيَّة وتُرتَّب عادة في جداول خاصة تُسمَّى الجداول المثلثية . وهذه الجداول غالباً مقرَّبة لمنازل عشرية تناسب الغرض المستعملة له. فإذا كنا نبحث عن دقَّة متناهية فيمكن أن نقرِّبها إلى مائة مرتبة عشرية أو أكثر ، ولكن نرى أننا غالباً نكتفي بثلاث مراتب عشرية أو أربع، (وربما خمس مراتب عشرية إذا كنا نبحث عن دقَّة أكثر) .

كثير من علماء المسلمين قد وضعوا جداول للنسب المثلَّثية والتي لم تتغير عما طوروه إلا الشيء القليل وربما كانت الجداول التي وضعوها أكثر دقَّة وخاصَّة أنها لم تكن توجد لديهم وسائل التقنية الحديثة من الحاسبات الآلية والحاسبات اليدوية الصغيرة والتي سوف نتحدث عن استخدامها في الجزء الأخير من هذا البند .

استفاد واضعو الجداول المثلثية من العلاقة بين قيم النسب (الدوال) المثلثية للزاويتين المتتامتين ، فكل زاوية من الفترة [٠° ، ٤٥°] تقابلها متمِّمتها من الفترة [٤٥° ، ٩٠°] تُكتب زوايا الفترة الأولى عادة في الجداول المثلثية في العمود الأيمن مرتَّبة من أعلى إلى أسفل ، وتُقرأ قيم النسب (الدوال) المثلثية المقابلة لهذه الزاوايا من

مرتَّبة من أسفل إلى أعلى وتُقرأ قيم النسب المثلثية لهذه الزوايا من المدخل السفلي للجدول .

مثـال (٦-٩) :

أوجد قيم الدوال المثلثية للزاويتين °٤٠ ، °٥٠

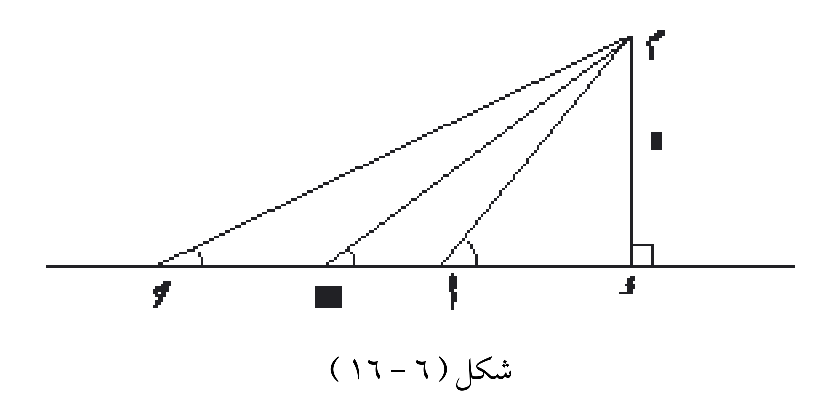
الحـــــــل :

بالنظر إلى الجدول نجد أن :

↘	جا	جتا	ظا	ظتا	
°٤٠	٠,٦٤٢٨	٠,٧٦٦٠	٠,٨٣٩١	١,١٩١٨	°٥٠
	جتا	جا	ظتا	ظا	↖

يهمنا عند التعامل مع الجدوال المثلثية والحاسبات أن نعرف أن النسب المثلثية لزاوية حادة تتغير بتغير الزاوية الحادة بين : °٠ وَ °٩٠

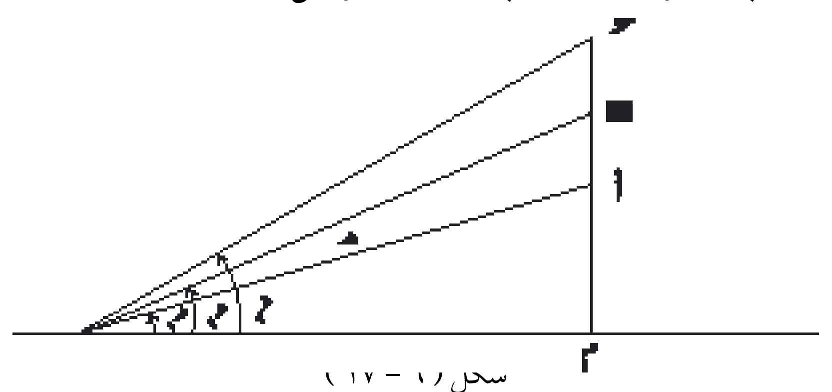
يوضِّح الشكل (٦ – ١٦) أنَّه كلما كبرت الزاوية الحادة كبر جيبها .



شكل (٦ – ١٦)

كما يوضح الشكل (٦ – ١٧) أنه كلما كبرت الزاوية الحادة صغر جيب تمامها،

وكلما كبرت الزاوية الحادة كبر ظلها وصغر ظل تمامها.



شكل (٦ - ١٧)

مثـال (٦-١٠) :

احسب جا ٥٠َ ٤٠°

الحـــــل :

الزاوية ٥٠َ ٤٠° تقع بين الزاوية ٤٠° والزاوية ٤١° ونعبِّر عن ذلك بأنَّ :

٤٠° < ٥٠َ ٤٠° < ٤١°

جا٤٠° < جا ٥٠َ ٤٠° < جا٤١°

أو ٠,٦٤٢٨ < جا ٥٠َ ٤٠° < ٠,٦٥٦١

وبحساب الفرق ٠,٦٥٦١ - ٠,٦٤٢٨ = ٠,٠١٣٣ نعلم أن جيب الزاوية الحادة يزداد كلما كبرت الزاوية ، وسوف نقبل أن جيب الزاوية يزداد بنسبة زيادة الزاوية فيكون :

$$\frac{٦٠}{٥٠} = \frac{٠,٠١٣٣}{س} \Leftarrow س = ٠,٠١١١$$

وهذا يعني أن زيادة ٥٠َ على ٤٠° يقابلها زيادة ٠,٠١١١ على ٠,٦٤٢٨

أي أن : جا٥٠َ ٤٠° ≈ ٠,٦٤٢٨ + ٠,٠١١١

= ٠,٦٥٣٩

) استخدام الحاسبات :

أصبح وجود الحاسبات الصغيرة التي يمكن بواسطتها الحصول على قيم ونتائج عمليات حسابية ودوال مثلثية ولوغارتمية ميزةً سهَّلت على الدارسين الكثير من الجهد والعناء الذي كانوا يواجهونه عند استخراج قيم معيَّنة من الجداول المثلثية. وهذا بالطبع لا يعني أن استخدام الحاسبة يُغني عن فهم طريقة استخراج قيم الدوال المثلثية عن طريق الرسم والقياس أو أيَّ من الطرق الأخرى .

يمكن بواسطة مفاتيح (أزرَّة) الجيب وجيب التمام والظل الموجودة في الحاسبات العلمية استخراج قيم الدوال المثلثية. بالنظر إلى مفاتيح أي آلة حاسبة نلاحظ وجود جـا [Sin] ، جتا [Cos] ، ظـا [Tan] وهي الرموز اللاتينية للدوال المثلَّثية وتُنطق (ساين) [Sin] ، (كوساين) [Cos] ، (تانجنت) [Tan] . أغلب الحاسبات يوجد بها مفاتيح تسمح لك باستخراج قيم الدوال إما بالتقدير الستيني (الدرجات) أو بالتقدير الدائري (الراديان) .

يصعب هنا أن نوضِّح كيفية استعمال الآلة الحاسبة الصغيرة عند البحث عن قيم الدوال المثلثية والسبب هو أن الحاسبات أنواع وكل نوع له طريقة خاصة بالاستعمال، لكن يوجد مع كل آلة كُتيِّب يشرح طريقة استعمالها ومنها استخراج قيم الدوال المثلثية إذا كانت من ضمن ما تقوم به الحاسبة ، وأغلب الحاسبات العلمية تحتوي على الدوال المثلثية .

مثـال (٦-١١) :

احسب جا ٥٠َ ٤٠°

الحــــــل :

سبق أن أوجدنا قيمة جيب هذه الزاوية باستخدام الجداول المثلثية ووجدنا أن:

جا ٥٠َ ٤٠° = ٠,٦٥٣٩

لكن باستخدام الحاسبة نجد أن :

جا ٥٠َ ٤٠° = ٠,٦٥٣٨٦٠٩ ، Sin 40° 50 = 0.6538609

وبالمقارنة بين القيمتين نجد أن الحاسبة تعطينا قيمة أدق من الجدول ، ولو قرَّبنا العدد الحاصل عن طريق الآلة إلى أربع منازل عشرية لوجدنا :

جا ٥٠َ ٤٠° = ٠,٦٥٣٩ وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها من الجدول.

مثال (٦-١٢) :

إذا كان جتا هـ = ٠,٣٤٢٠٢٠١ ، فأوجد زاوية هـ .

الحل :

ندخل قيمة جيب تمام الزاوية هـ = ٠,٣٤٢٠٢٠١ في الآلة ثم نضغط على المفتاح المعكوس [INV] ثم نضغط على المفتاح [Cos] فنحصل على الزاوية هـ = ٧٠°

هناك آلات مضاف لها مفتاح آخر يجب أن نضغط عليه قبل المفتاح [INV] ويرمز له [Qnd] .

وأخرى لا نحتاج فيها إلى استعمال المفتاح [INV] لوجود [Sin^{-1}] ، [Cos^{-1}] ، [Tan^{-1}]

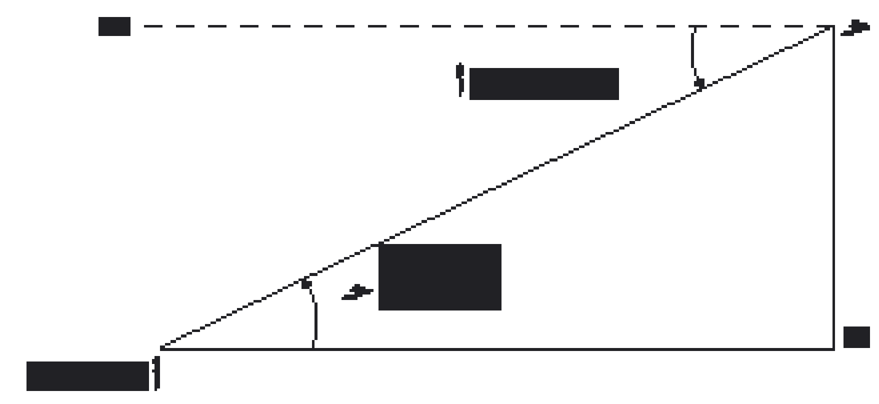
٦ - ٧ حساب الارتفاعات والأبعاد :

نتمكن من حساب الارتفاعات والأبعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها بها ، ومن ثم نحسب النسبة المثلَّثية لهذه الزوايا باستخدام الجدول أو الحاسبة فنتوصل بذلك إلى حل المسائل التي تكون فيها هذه الارتفاعات أو الأبعاد مجهولة.

افرض أن راصداً واقف بصورة أن عينه في النقطة أ ونظر إلى نقطة ب تقع فوق أفق أ ، فإن الزاويــة الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد إلى النقطة ب

وبين أفق أ تدعى «زاوية ارتفاع جـ بالنسبة إلى أ مثل الزاويـة جـ $\hat{أ}$ ب في الشكل (٦ – ١٨).

أما إذا كانت عين الراصد عند النقطة جـ ونظر إلى أ التي تقع تحت أفق جـ، فإن الزاوية الكائنة بين المستقيم الواصل من عين الراصد إلى النقطة أ وبين أفق جـ تدعى «زاوية انخفاض أ بالنسبة إلى جـ» مثل الزاوية أ جـ $\hat{}$ س في الشكل (٦ – ١٨).

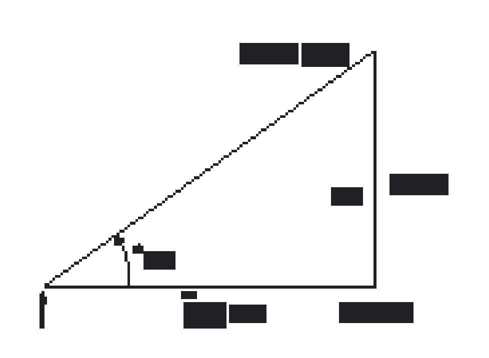


مثـال (١-١٣) :

من نقطة أ، تبعد عن قاعدة مئذنة ٧٥ متراً، نجد أن زاوية ارتفاع قمَّتها ٢٢°.

فما ارتفاع المئذنة ؟

الحـــل :



ليكن س ارتفاع المئذنة.

ظا ٢٢° = $\frac{س}{٧٥}$

أي : س = ٧٥ × ظا ٢٢°

باستخدام الحاسبة نجد أن :

Tan 22° = 0.4040262

ظا ٢٢° = ٠,٤٠٤٠٢٦٢

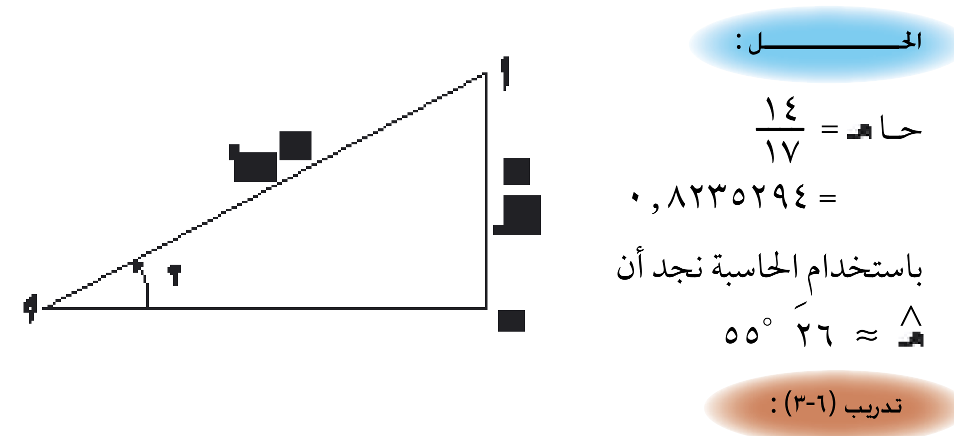
س = ٧٥ × ٠,٤٠٤٠٢٦٢ = ٣٠,٣٠١٩٧ متراً ≈ ٣٠,٣م ويمكن إجراء الحسابات بالحاسبة دفعة واحدة وفق الترتيب :

| 22 | Tan | | 75 | = | → 30.30197

مثال (٦-١٤) :

سلِّم سيارة إطفاء طوله ١٧ متراً ويصل إلى سطح مبنى ارتفاعه ١٤ متراً عن سطح الأرض . ما هي الزاوية التي يُكوِّنها السلِّم مع سطح الأرض ؟

الحــــــــــل :



حا هـ = $\frac{١٤}{١٧}$

= ٠,٨٢٣٥٢٩٤

باستخدام الحاسبة نجد أن

$\hat{هـ}$ ≈ ٥٥° ٢٦َ

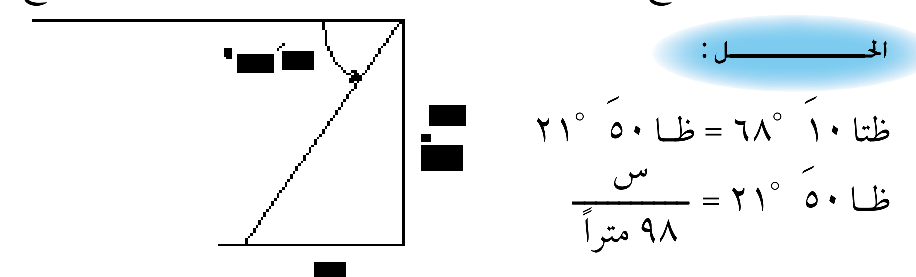
تدريب (٦-٣) :

في المثال (٦ – ١٤) احسب بُعد قاعدة السلِّم عن المبنى .

مثال (٦-١٥) :

مبنى يرتفع عن سطح الأرض ٩٨ متراً، عند الصعود إلى سطح المبنى والنظر إلى الجهة الأخرى من الشارع وجد أن زاوية الانخفاض ١٠َ ٦٨°. ما عرض الشارع؟

الحــــــــــل :



ظتا ١٠َ ٦٨° = ظا ٥٠َ ٢١°

ظا ٥٠َ ٢١° = $\frac{س}{٩٨ \text{ متراً}}$

س = ٩٨ × ظا ٥٠َ ٢١°

= ٩٨ × ٠,٤٠٠٦٤٦٤

= ٣٩,٢٦٣٣٤٧ متر ≈ ٣٩,٢٦

إذن عرض الشارع = ٣٩,٢٦ متر

تمارين (٦ ــ ٥)

(١) حوِّل قيم النسب المثلثية الآتية إلى أعداد عشرية، ثم قارن النتائج التي تحصل عليها بالقيم التي تحصل عليها من استخدام الحاسبة والجدول :

(أ) جا ٤٥° = جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(ب) جتا ٣٠° = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(هـ) ظا ٦٠° = ظتا ٣٠° = $\sqrt{٣}$

(ء) جا ٣٠° = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

(٢) أوجد :

جا ٣٠َ ٢٥° ، جا ١٠َ ٦٥° ، جتا ٢٠َ ١٢° ،

جتا ٤٨َ ٥٢° ، ظا ٥٠َ ٤١° ، ظتا ١٦َ ٥٩° ،

(٣) استخدم الحاسبة لحساب الزاوية في كل من الحالات التالية :

جا هـ = ٠,٢٥٦٠ ، جا هـ = ٠,٧٤٨٩٥٦

جا هـ = ٠,٨٢٥١١٣ ، جتا هـ = ٠,٥٦٤٩٦٧

جتا هـ = ٠,٧٣١٩٤٨ ، ظا هـ = ١,١٣٠٢٩٤

ظتا هـ = ٠,٤١٤٢١٣

(٤) من نقطة تبعد عن قاعدة مئذنة ٥٠ متراً ، وجدنا أن زاوية ارتفاع قمّتها ٣٠ ٢٧°. فما ارتفاع المئذنة ؟

(٥) وجد مسّاح من سطح منزل أن زاوية ارتفاع قمة شجرة باسقة ٢٩° ، وزاوية انخفاض قاعدتها ١٢°. فإذا كان البعد بين المنزل والشجرة ٢٥متراً . فما ارتفاع كل من المنزل والشجرة ؟

(٦) وجد رجل أن زاوية ارتفاع قمة جبل هي ٢١َ ٣٢° ، ولما سار نحو الجبل مسافة ٨٠٠ متراً وجد أن زاوية الارتفاع ٥٠° . فما ارتفاع قمة الجبل ؟

(٧) سارية علم ارتفاعها ١٠أمتار فوق تل ، ومن نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدة التل وجد أن زاويتي ارتفاع قمة السارية وقاعدتها ٢٠ ٤٧°، ٢٠ ٣٨° على الترتيب . احسب ارتفاع التل عن سطح الأرض .

(٨) رصد رجل مئذنة من نقطة على سطح الأرض فوجد أن زاوية ارتفاعها ٣٨َ ٣٢° ولما تقدم الرجل نحو المئذنة على الخط المستقيم الواصل بينهما وجد أن زاوية ارتفاعها ٢٤ ٣٦° . فإذا كان ارتفاع المئذنة ١٢ متراً ، فاحسب طول المسافة التي سارها الرجل .

(٩) من قاعدة مبنى ارتفاعه عشرة أمتار، كانت زاوية ارتفاع مئذنة٤٥°، ومن سطح المبنى وجد أن زاوية ارتفاعها ٣٠°، احسب ارتفاع المئذنة وبعدها عن المبنى.

(١٠) س ، ص نقطتان على شاطئ نهر والمسافة بينهما ١٥٠متراً ، ع نقطة على الشاطئ الآخر ، ص سَ^ع = ٥٠° ، س صَ^ع = ٥٠° .

ما عرض النهر؟

(١١) من قمة برج ارتفاعه ٨٠ متراً رصد رجل قريتين واقعتين في جهتين مختلفتين من البرج وعلى استقامة قاعدته، فوجد أن زاويتي الانخفاض ١٤ ١٥° ، ٤٢ ٢٠° على الترتيب . فما هو البعد بين القريتين ؟

(١٢) يقع عمود بين نقطتين تبعدان عن بعضهما ١٠٠متر. من النقطة اليمنى وجد

أن زاوية ارتفاع قمة العمود ١٢° . ومن النقطة اليسرى وجد أن زاوية ارتفاعها ٤٩° فما ارتفاع هذا العمود ؟

تمارين عامة على الباب السادس

١) حوِّل الدرجات إلى راديان والراديان إلى درجات :

(أ) ٤٢° ، ٨٩° ، ١٠ ٥٠° ، ٧٥°

(ب) $\frac{١}{٢}$ راديان ، ١ راديان ، $\frac{ط}{١٢}$ راديان ، $\frac{٣}{٢}$ راديان.

٢) كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق، في عشر ثوان إذا كان طوله ٩ سم ؟

٣) قمر صناعي يدور حول الأرض دورة كاملة كل ٤ ساعات، فإذا كان يبعد عن مركز الأرض بمقدار ٦٥٠٠كم ، فما هي سرعته ؟

٤) مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعيه القائمين ٣,٥ سم .

(أ) ارسم هذا المثلث إذا كان جيب الزاوية المقابلة لذلك الضلع = $\frac{٧}{١٠}$

(ب) احسب طول ضلعه القائم الآخر ثم احسب قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة المقابلة للضلع القائم الآخر .

٥) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٢٦سم، وطول أحد ضلعيه القائمين ٢٤سم.

(أ) احسب طول ضلعه القائم الثاني .

(ب) احسب قيم النسب المثلثية لزاويته الحادة الصغرى .

(جـ) احسب قيم النسب المثلثية لزاويته الحادة الكبرى .

(د) ما العلاقة بين قيم النسب المثلثية للزاويتين الحادتين الصغرى والكبرى.

٦) إذا كان : ظا ٢٢° = ٠,٤٠٤٠

فاحسب قيم النسب المثلثية الأخرى لهذه الزاوية والزاوية المتممة لها . (بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة) .

٧) ما قيمة الزاوية الحادة هـ التي تحقق المعادلة التالية :

٢ جتا^{٢} هـ = ١ ؟

احسب قيم جميع النسب المثلثية لهذه الزاوية .

٨) استخدم الجداول المثلثية لحساب ما يلي :

جا ٢٥َ ٢٧° ، جا ١٠َ ٧٥° ، جتا ٥٠َ ٤٥°

جتا ٤٨َ ٦٠° ، ظا ١٥َ ٤٧° ، ظتا ١٧َ ٦٩°

٩) استخدم الحاسبة في حساب النسب المثلثية في المسألة رقم ٨ السابقة .

١٠) قيس طول ظل بناية عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس ٣٠° ثم أعيد القياس عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس ٦٠° فكان الفرق بين القياسين ٣٥ متراً ، أوجد ارتفاع البناية .

١١) باخرتان غادرتا الميناء في الوقت نفسه، الأولى أبحرت بسرعة ٤٠ كم/ الساعة في اتجاه ٤٢° شمال شرقي ، والثانية أبحرت بسرعة ٥٠ كم/ الساعة في اتجاه ٤٨° الجنوب الشرقي . كم تبعدان عن بعضهما بعد ثلاث ساعات من مغادرة الميناء .

الزاوية	جـا	جتا	ظـا	ظتا	
٠°	٠,٠٠٠٠	١,٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠		٩٠°
١°	٠,٠١٧٥	٠,٩٩٩٨	٠,٠١٧٥	٥٧,٢٩٠٠	٨٩°
٢°	٠,٠٣٤٩	.٠٩٩٩٤	٠,٠٣٤٩	٢٨,٦٣٦٣	٨٨°
٣°	٠,٠٥٢٣	٠,٩٩٨٦	٠,٠٥٢٤	١٩,٠٨١١	٨٧°
٤°	٠,٠٦٩٨	٠,٩٩٧٦	٠,٠٦٩٩	١٤,٣٠٠٧	٨٦°
٥°	٠,٠٨٧٢	٠,٩٩٦٢	٠,٠٨٧٥	١١,٤٣٠١	٨٥°
٦°	٠,١٠٤٥	٠,٩٩٤٥	٠,١٠٥١	٩,٥١٤٤	٨٤°
٧°	٠,١٢١٩	٠,٩٩٢٥	٠,١٢٢٨	٨,١٤٤٣	٨٣°
٨°	٠,١٣٩٢	٠,٩٩٠٣	٠,١٤٠٥	٧,١١٥٤	٨٢°
٩°	٠,١٥٦٤	٠,٩٨٧٧	٠,١٥٨٤	٦,٣١٣٨	٨١°
١٠°	٠,١٧٣٦	٠,٩٨٤٨	٠,١٧٦٣	٥,٦٧١٣	٨٠°
١١°	٠,١٩٠٨	٠,٩٨١٦	٠,١٩٤٤	٥,١٤٤٥	٧٩°
١٢°	٠,٢٠٧٩	٠,٩٧٨١	٠,٢١٢٦	٤,٧٠٤٦	٧٨°
١٣°	٠,٢٢٥٠	٠,٩٧٤٤	٠,٢٣٠٩	٤,٣٣١٥	٧٧°
١٤°	٠,٢٤١٩	٠,٩٧٠٣	٠,٢٤٩٣	٤,٠١٠٨	٧٦°
١٥°	٠,٢٥٨٨	٠,٩٦٥٩	٠,٢٦٧٩	٣,٧٣٢١	٧٥°
١٦°	٠,٢٧٥٦	٠,٩٦١٣	٠,٢٨٦٧	٣,٤٨٧٤	٧٤°
١٧°	٠,٢٩٢٤	٠,٩٥٦٣	٠,٣٠٥٧	٣,٢٧٠٩	٧٣°
١٨°	٠,٣٠٩٠	٠,٩٥١١	٠,٣٢٤٩	٣,٠٧٧٧	٧٢°
١٩°	٠,٣٢٥٦	٠,٩٤٥٥	٠,٣٤٤٣	٢,٩٠٤٢	٧١°
٢٠°	٠,٣٤٢٠	٠,٩٣٩٧	٠,٣٦٤٠	٢,٧٤٧٥	٧٠°
٢١°	٠,٣٥٨٤	٠,٩٣٣٦	٠,٣٨٣٩	٢,٦٠٥١	٦٩°
٢٢°	٠,٣٧٤٦	٠,٩٢٧٢	٠,٤٠٤٠	٢,٤٧٥١	٦٨°
	جتا	جـا	ظتا	ظـا	الزاوية

الزاوية	جـا	جتا	ظـا	ظتا	
٢٣°	٠,٣٩٠٧	٠,٩٢٠٥	٠,٤٢٤٥	٢,٣٥٥٩	٦٧°
٢٤°	٠,٤٠٦٧	٠,٩١٣٥	٠,٤٤٥٢	٢,٢٤٦٠	٦٦°
٢٥°	٠,٤٢٢٦	٠,٩٠٦٣	٠,٤٦٦٣	٢,١٤٤٥	٦٥°
٢٦°	٠,٤٣٨٤	٠,٨٩٨٨	٠,٤٨٧٧	٢,٠٥٠٣	٦٤°
٢٧°	٠,٤٥٤٠	٠,٨٩١٠	٠,٥٠٩٥	١,٩٦٢٦	٦٣°
٢٨°	٠,٤٦٩٥	٠,٨٨٢٩	٠,٥٣١٧	١,٨٨٠٧	٦٢°
٢٩°	٠,٤٨٤٨	٠,٨٧٤٦	٠,٥٥٤٣	١,٨٠٤٠	٦١°
٣٠°	٠,٥٠٠٠	٠,٨٦٦٠	٠,٥٧٧٤	١,٧٣٢١	٦٠°
٣١°	٠,٥١٥٠	٠,٨٥٧٢	٠,٦٠٠٩	١,٦٦٤٣	٥٩°
٣٢°	٠,٥٢٩٩	٠,٨٤٨٠	٠,٦٢٤٩	١,٦٠٠٣	٥٨°
٣٣°	٠,٥٤٤٦	٠,٨٣٨٧	٠,٦٤٩٤	١,٥٣٩٩	٥٧°
٣٤°	٠,٥٥٩٢	٠,٨٢٩٠	٠,٦٧٤٥	١,٤٨٢٦	٥٦°
٣٥°	٠,٥٧٣٦	٠,٨١٩٢	٠,٧٠٠٢	١,٤٢٨١	٥٥°
٣٦°	٠,٥٨٧٨	٠,٨٠٩٠	٠,٧٢٦٥	١,٣٧٦٤	٥٤°
٣٧°	٠,٦٠١٨	٠,٧٩٨٦	٠,٧٥٣٦	١,٣٢٧٠	٥٣°
٣٨°	٠,٦١٥٧	٠,٧٨٨٠	٠,٧٨١٣	١,٢٧٩٩	٥٢°
٣٩°	٠,٦٢٩٣	٠,٧٧٧١	٠,٨٠٩٨	١,٢٣٤٩	٥١°
٤٠°	٠,٦٤٢٨	٠,٧٦٦٠	٠,٨٣٩١	١,١٩١٨	٥٠°
٤١°	٠,٦٥٦١	٠,٧٥٤٧	٠,٨٦٩٣	١,١٥٠٤	٤٩°
٤٢°	٠,٦٦٩١	٠,٧٤٣١	٠,٩٠٠٤	١,١١٠٦	٤٨°
٤٣°	٠,٦٨٢٠	٠,٧٣١٤	٠,٩٣٢٥	١,٠٧٢٤	٤٧°
٤٤°	٠,٦٩٤٧	٠,٧١٩٣	٠,٩٦٥٧	١,٠٣٥٥	٤٦°
٤٥°	٠,٧٠٧١	٠,٧٠٧١	١,٠٠٠	١,٠٠٠	٤٥°
	جتا	جـا	ظتا	ظـا	الزاوية

الباب السابع

الدوال الأسية واللوغاريتمية

٧ - ١ الأسس .

٧ - ٢ الجذور .

٧ - ٣ الدالة الأسية .

٧ - ٤ تطبيقات جبرية .

٧ - ٥ تعريف اللوغاريتم ـ الدالة اللوغاريتمية .

٧ - ٦ قوانين اللوغاريتمات .

٧ - ٧ اللوغاريتمات العشرية .

٧ - ٨ الاستفادة من اللوغاريتمات في إجراء الحسابات.

٧ ـ ١ الأســـــس :

سبق لك أن درست في المرحلة المتوسطة، كلاًّ من الأسس والجذور التربيعية، حيث تعرفت على قوى عددٍ كُلّي أو نسبي ، عندما يكون الأس عدداً طبيعياً ، كما تعرفت على الجذر التربيعي لعددٍ غير سالب .

وعندما تعرَّفت على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، رأيت أن خصائص العمليات في مجموعة الأعداد النسبية ن هي نفسها في ح .

(١) قوى عدد حقيقي :

كما رأينا في دراستنا لقوى عدد نسبي ، فإنه في حالة وجود حاصل ضرب عدَّة عوامل متساوية مثل : $\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ}$ ، $\text{أ} \in \text{ح}$

(لاحظ أن لدينا في هذا المثال أربعة عوامل كل منها أ) ، فبدلاً من كتابته بالشكل السابق ، نكتبه اختصاراً : $\text{أ}^{٤}$

أي أنَّ : $\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} = \text{أ}^{٤}$

وعليه يكون : $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٥}$

وكذلك فإنَّ : $(-\frac{٢}{٣}) \times (-\frac{٢}{٣}) = (-\frac{٢}{٣})^{٢}$ وهو مربَّع العدد $(-\frac{٢}{٣})$

وأيضاً : $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = (\sqrt{٣})^{٣}$ وهو مكعب العدد $\sqrt{٣}$

وبصورة عامة :

تـعـــريـــف (٧-١) :

إذا كان $\text{أ} \in \text{ح}$ ، $\text{ن} \in \text{ط}$ فإنَّ :

$$\overbrace{\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \ldots\ldots\ldots \times \text{أ}}^{\text{ن عاملاً كل منها أ}} = \text{أ}^{\text{ن}}$$

العدد أ يسمَّى <u>الأساس</u> والعدد ن يسمَّى <u>الأسّ</u> والمقدار $\text{أ}^{\text{ن}}$ يسمَّى : <u>القوّة النونيّة للعدد</u> أ.

وكما رأينا في المرحلة المتوسّطة في حالة قوى عدد نسبي ، نصطلح على ما يلي :

تـعـــريـــف (٧-٢) :

إذا كان $\text{أ} \in \text{ح}$ ، $\text{أ} \neq ٠$ ، $\text{ن} \in \text{ط}$ فإنَّ :

(١) $\text{أ}^{٠} = ١$

(٢) $\text{أ}^{-\text{ن}} = \dfrac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$

وبالرجوع إلى التعريفين (٧ – ١) ، (٧ – ٢) نكون قد عرَّفنا قوَّة عدد حقيقي، إذا كان الأسّ عدداً صحيحاً ، ونلخِّص ذلك بما يلي :

تـعـــريـــف (٧-٣) :

إذا كان $\text{أ} \in \text{ح}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$ فإنَّ :

$$\text{أ}^{\text{ن}} = \begin{cases} \overbrace{\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \ldots\ldots\ldots \times \text{أ}}^{\text{ن عاملاً كل منها أ}} & \text{عندما ن} > ٠ \\ ١ & \text{عندما ن} = ٠ \text{ ، أ} \neq ٠ \\ \dfrac{١}{\text{أ}^{|\text{ن}|}} & \text{عندما ن} < ٠ \text{ ، أ} \neq ٠ \end{cases}$$

مثـال (٧-١) :

(١) $(\sqrt{٥})^٢ = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٢٥} = ٥$ (مربع العدد $\sqrt{٥}$)

(٢) $(\sqrt{٣})^٠ = ١$

(٣) $١٠^{-٤} = \frac{١}{١٠^٤} = \frac{١}{١٠٠٠٠} = ٠,٠٠٠١$

(٤) معامل التمدد الطولي للنحاس هو مط = $١,٧ \times ١٠^{-٥}$

هذا يعني أن مط = $\frac{١,٧}{١٠^٥} = ٠,٠٠٠٠١٧$

(٥) نصف قطر ذرة الهيدروجين = ٠,٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠٥٣ متراً يمكننا كتابة هذا العدد بالشكل : $٥,٣ \times ١٠^{-١٠}$ متراً.

(٦) سرعة الضوء في الفراغ تُكتب بالشكل : ٣×١٠^٥ كلم/ ثانية

بدلاً من ٣٠٠٠٠٠ كلم/ ثانية

تـــمـــاريـــن (٧ ــ ١)

لكتابة الأعداد العلميَّة الكبيرة ، نستفيد من القوى ذات الأس الموجب للعدد ١٠، وذلك لتسهيل حفظها أو كتابتها، فنضعها على الشكل:

(عدد ينتمي إلى الفترة [١ ، ١٠) مضروباً بالقوة المناسبة للعدد ١٠)

فقطر الشمس مثلاً يقدَّر بحوالي ١٣٩٠٠٠٠ كلم

نكتبه : ١٣٩٠٠٠٠ = $١,٣٩ \times ١٠^٦$ كلم

استفد من قوى العدد ١٠ في كتابة الأعداد التالية :

(١) سرعة جواد السباق حوالي ٦٨٠٠٠ متر/ ساعة .

(٢) سرعة عربة السباق حوالي ٦٤٠٠٠٠ متر/ ساعة.

(٣) سرعة طائرة نفَّاثة حوالي ٣ ٥٠٠ ٠٠٠ متر/ ساعة .

(٤) سرعة مكّوك الفضاء حوالي ٣٠ ٠٠٠ ٠٠٠ متر/ ساعة.

(٥) سرعة الأرض في فلكها حوالي ١٠٧ ٠٠٠ ٠٠٠ متر/ ساعة .

(٦) سرعة الضوء في الخلاء حوالي ١٠٨ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ متر/ ساعة

اكتب الأعداد التالية ، كما في المثال الآتي :

متوسط نصف قطر الأرض = ٦,٣٨ × ١٠^{٦} متراً = ٦٣٨٠٠٠٠ م

(٧) متوسط كثافة الأرض = ٥,٥٢ × ١٠^{٣} كلغم لكل متر مكعب.

(٨) متوسط بعد الأرض عن الشمس = ١,٥ × ١٠^{٨} كلم.

(٩) متوسط بعد القمر عن الأرض = ٣,٨٤ × ١٠^{٥} كلم

(١٠) متوسط نصف قطر القمر = ١,٧٤ × ١٠^{٦} م.

لكتابة الأعداد العلميّة الصغيرة، نستفيد من القوى ذات الأسّ السالب للعدد ١٠ وذلك بأن نضعها على الشكل :

(عدد ∋ [١ ، ١٠) × القوة المناسبة ذات الأس السالب للعدد ١٠)

فإذا قلنا إن قطر نواة ذرةٍ يساوي تقريباً : ٠,٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٥ ميكرون فهذا يعني : ٥ × ٠,٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠١ = ٥ × ١٠$^{-٩}$ ميكرون

(الميكرون ـ أو الميكرومتر ـ = ٠,٠٠١ ملم) .

استفد من قوى العدد ١٠ في كتابة الأعداد التالية :

(١١) طول أحد أنواع البكتريا يساوي : ٠,٠٠٤٥٢ ملم .

(١٢) كتلة ذرة الهيدروجين = ٠,٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠١٦٦٣ ملغم

(١٣) توصل علماء الطبيعة المسلمون، أثناء عصرنا الزاهر ، عندما اتّبعنا هدي الإسلام في البحث العلمي ، إلى وحدة قياس للوزن صغيرة جداً هي الهباء ، والهباء ≈ ٠,٠٠٠ ٠٠٠ ٠٣ غم.

اكتب الأعداد التالية كما في المثال الآتي :

هناك بكتريا صغيرة طولها $٢,٣ \times ١٠^{-٤}$ ملم = $٢,٣ \times ٠,٠٠٠١$ = $٠,٠٠٠٢٣$ ملم.

(١٤) كتلة الالكترون = $٩,١١ \times ١٠^{-٢٥}$ ملغم.

(١٥) كتلة البروتون = $١,٦٧٣ \times ١٠^{-٢١}$ ملغم.

(١٦) كتلة النيترون = $١,٦٧٥ \times ١٠^{-٢٤}$ غم

في التمارين من (١٧) إلى (٢٤)، ميِّز العبارة الصحيحة والخاطئة وبيِّن السبب :

(١٧) $أ^{-ن} = \left(\frac{١}{-أ}\right)^{ن}$ لكل $ن \in ط$

(١٨) $أ^{س}$ تعني أن العدد أ مضروبٌ بنفسه س من المرات ($س \in ط$).

(١٩) إذا رفعنا أي عدد حقيقي إلى القوة صفر ، فإن الناتج يساوي الواحد.

(٢٠) لكل $س \in ح$ عين العبارة الصحيحة أو الخاطئة فيما يلي :

(أ) $(س + ٨) = ١$

(ب) $\frac{١}{س^{٢} + ٨} = (س^{٢} + ٨)^{-١}$

(جـ) $\frac{١}{س + ٨} = (س + ٨)^{-١}$

(٢١) ٣٠ بليوناً = ٣×١٠^{١٠}

(٢٢) $٠,٠٠٠٠٥٢٣ = ٥,٢٣ \times ١٠^{-٥}$

(٢٣) $٤,٢ \times ١٠^{-٥} = ٠,٠٠٠٠٢٤$

(٢٤) $٨,٩١ \times ١٠^{-٤} = ٠,٠٠٠٠٨٩١$

(٢) خصائص قوى عدد حقيقي :

كما هي الحال في قوى عدد نسبي، نبرهن على النظرية التالية المتعلقة بقوى عدد حقيقي:

نظرية (٧ - ١) :

إذا كان أ ، ب $\in$ ح ، م ، ن $\in$ ط فإنَّ :

(١) $أ^{ن} . أ^{م} = أ^{ن+م}$ (٢) $(أ^{ن})^{م} = أ^{ن.م}$

(٣) $(أ . ب)^{ن} = أ^{ن} . ب^{ن}$ (٤) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$ ، ب $\neq$ ٠

(٥) بفرض ن > م ، أ $\neq$ ٠ $\frac{أ^{ن}}{أ^{م}} = أ^{ن-م}$ ، $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = \frac{١}{أ^{ن-م}}$

البرهان :

سنكتفي بالبرهان على الخاصة الأولى، ونترك البرهان على بقية الخواص للطالب:

$$أ^{ن} . أ^{م} = \underbrace{أ \times أ \times \cdots \times أ}_{\text{ن عاملاً كل منها أ}} \times \underbrace{أ \times أ \times \cdots \times أ}_{\text{م عاملاً كل منها أ}}$$

$$= \underbrace{أ \times أ \times \cdots \times أ}_{\text{(ن + م) عاملاً كل منها أ}}$$

$$= أ^{ن+م}$$

مثال (٧-٢) :

بسِّط كلاًّ مما يلي :

أ) $\frac{١٠ أ س^{٥}}{١٥ أ^{٣} س^{٣}}$ ، ب) $\frac{س}{ص^{٢}} \left(\frac{ص}{س^{٢}}\right)^{٣}$ ، هـ) $\left(\frac{-أ^{٣}}{ب^{٤}}\right)^{٢} \left(\frac{-أ . ب}{هـ}\right)^{٣}$

الحـــــــــل :

أ) $\frac{١٠\text{أ}\,\text{س}^{٥}}{١٥\text{أ}^{٣}\text{س}^{٣}} = \frac{١٠}{١٥} \cdot \frac{\text{أ}}{\text{أ}^{٣}} \cdot \frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٣}} = \frac{٢}{٣} \cdot \frac{١}{\text{أ}^{٢}} \cdot \frac{\text{س}^{٢}}{١} = \frac{٢\text{س}^{٢}}{٣\text{أ}^{٢}}$

أو بصورة أخرى : $\frac{١٠\text{أ}\,\text{س}^{٥}}{١٥\text{أ}^{٣}\text{س}^{٣}} = \frac{٢\text{س}^{٢} \times ٥\text{أ}\,\text{س}^{٣}}{٣\text{أ}^{٢} \times ٥\text{أ}\,\text{س}^{٣}} = \frac{٢\text{س}^{٢}}{٣\text{أ}^{٢}}$

ب) $\frac{\text{س}}{\text{ص}^{٢}} \left(\frac{\text{ص}}{\text{س}^{٢}}\right)^{٣} = \frac{\text{س}}{\text{ص}^{٢}} \cdot \frac{\text{ص}^{٣}}{\text{س}^{٦}} = \frac{\text{س}\,\text{ص}^{٣}}{\text{س}^{٦}\text{ص}^{٢}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}^{٥}}$

جـ) $\left(\frac{-\text{أ}^{٣}}{\text{ب}^{٤}}\right)^{٢} \left(\frac{-\text{أ}\,\text{ب}}{\text{جـ}}\right)^{٣} = \frac{\text{أ}^{٦}}{\text{ب}^{٨}} \times \frac{-\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٣}}{\text{جـ}^{٣}} = \frac{-\text{أ}^{٦} \cdot \text{أ}^{٣}\text{ب}^{٣}}{\text{ب}^{٨}\text{جـ}^{٣}} = \frac{-\text{أ}^{٩}\text{ب}^{٣}}{\text{جـ}^{٣}\text{ب}^{٨}} = \frac{-\text{أ}^{٩}}{\text{جـ}^{٣}\text{ب}^{٥}}$

مثـــال (٧-٣) :

تعلم أن المتر يساوي $١٠^{٣}$ ملم وأن المليمتر يساوي $١٠^{٣}$ ميكرون ، أوجد بالميكرون في الثانية سرعة الصوت بالهواء إذا كانت تساوى ٣٤٤ م/ ث .

الحـــــــــل :

٣٤٤م / ث = $٣,٤٤ \times ١٠^{٢}$ م/ ث

= $٣,٤٤ \times ١٠^{٢} \times ١٠^{٣}$ ملم/ ث

= $٣,٤٤ \times ١٠^{٢} \times ١٠^{٣} \times ١٠^{٣}$ ميكرون/ ث

= $٣,٤٤ \times ١٠^{٨}$ ميكرون/ ث

تـــمـــاريـــن (٧ ــ ٢)

في التمارين من (١) إلى (٦) ميِّز العبارة الصحيحة والخاطئة وبيِّن السبب :

(١) $\text{أ}^{ن} \cdot \text{ب}^{م} = (\text{أ} \cdot \text{ب})^{ن+م}$ (٢) $\text{أ}^{ن} \cdot \text{أ}^{م} \cdot \text{أ}^{هـ} = \text{أ}^{ن+م+هـ}$

(٣) $(\text{أ} + \text{ب})^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$ (٤) $(\text{أ} - \text{ب})^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

(٥) $\frac{\text{أ}^{٤}}{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٤}} = \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٤}}$ (٦) $\left(\frac{\text{ط}}{\sqrt{٣}}\right)^{-٥} = \frac{٩\sqrt{٣}}{\text{ط}^{٥}}$

في التمارين من (٧) إلى (٩) ضع في الفراغات ما يناسبها :

(٧) $٤\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٣} - ٢٤\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٢} = (٢\text{أ}\text{ب})^{٢}(\text{..........} - \text{..........})$.

(٨) $\text{س}^{هـ} + \text{س}^{هـ+٢} - \text{س}^{٢هـ} = \text{س}^{هـ}(\text{..........} + \text{..........} - \text{..........})$ ، $هـ \in \text{ط}$.

(٩) $\text{ب}^{٢ن} - \text{ب}^{ن-١} - \text{ب}^{ن+٢} = \text{ب}^{ن-١}(\text{........} - \text{........} - \text{........})$ ، $ن \in \text{ط} - \{١\}$

في التمارين من (١٠) إلى (١٣) بسِّط العبارات علماً بأن المقام في كلٍّ منها لا يساوي الصفر.

(١٠) $\left(\frac{٢ - \text{س}^{٢}}{٣}\right)^{٢} \cdot \frac{٣\text{ص}}{\text{س}^{٤}}$ (١١) $\frac{\text{س}^{ن}\text{ص}^{ن-١}}{(\text{س} \cdot \text{ص})^{ن-١}}$

(١٢) $\frac{\text{س}^{ن-٢}\text{ع}^{٢ن}}{\text{س}^{ن-١}(\text{ع}^{ن-١})^{٢}}$ (١٣) $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}^{٢}}\right)^{ن}\left(\frac{\text{أب}}{\text{جـ}}\right)^{٢ن}\left(\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}\right)^{٣ن}$

يطلب حل المسائل من (١٤) إلى (١٨) بالاعتماد على خصائص القوى :

(١٤) تنتشر أمواج الراديو بسرعة ٣×١٠^{٨} م/ ث ، أوجد المسافة التي تقطعها موجة الراديو خلال يوم واحد .

(١٥) في المسألة السابقة أوجد الزمن اللازم لوصول إشارة مرسلة من الأرض بالراديو إلى مركبة فضاء تبعد $٥,٤ \times ١٠^{٦}$م عن موضع الاتصال على الأرض.

(١٦) قال تعالى : ﴿ وَأَنَّهُۥ هُوَ رَبُّ ٱلشِّعْرَىٰ ﴾ ـ سورة النجم الآية ٤٩ ـ والشِّعري اليمانية نجم يبعد عن الأرض مسافة قدَّرها العلماء بحوالي (٣٣ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠) كيلومتر . فكم يوماً يلزم لوصول ومضة من الشِّعرى إلى الأرض؟ (سرعة الضوء ٣ × ١٠^٨ م/ ث).

(١٧) تصل ومضة الضوء المنطلقة من نجم (النسر الواقع) إلى الأرض خلال (٧٢٠ ٠٠٠ ٠٠٠) ثانية .

أوجد بعد هذا النجم عن الأرض. (سرعة الضوء ٣ × ١٠^٨ م/ ث).

(١٨) يقطع مكوك الفضاء ثلاثين مليون متر في الساعة، ففي الوقت الذي يتحرك خلاله بهذه السرعة، أوجد ما يقطعه المكوك بالثانية الواحدة. (قرِّب الجواب إلى أقرب متر) .

(٣) الأسس أعداد صحيحة :

يمكننا تعميم النظرية (٧ – ١) بحيث تشمل قوى عدد حقيقي عندما تكون الأسس أعداداً صحيحة، وذلك اعتماداً على التعريف (٧–٢) ، فنحصل على :

نظرية (٧-٢) :

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، م ، ن ∈ ص فإنّ :

(١) $\text{أ}^{\text{ن}} . \text{أ}^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{ن}+\text{م}}$

(٢) $(\text{أ}^{\text{ن}})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{ن}\cdot\text{م}}$

(٣) $(\text{أ} . \text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} . \text{ب}^{\text{ن}}$

(٤) $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}}$ ،

(٥) $\frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{أ}^{\text{م}}} = \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$

شريطة أن لا ينعدم أي مقدار يقع بالمقام ، كما لا ينعدم أي مقدار مرفوع إلى الأس (صفر).

سنكتفي بإيضاح ذلك في حالة وجود أسس سالبة من خلال فقرات المثال التالي:

مثـال (٧-٤) :

(١) $\text{أ}^{-٣} \times (\text{أ})^{-٥} = \frac{١}{\text{أ}^{٣}} \times \frac{١}{\text{أ}^{٥}}$ حسب التعريف (٧ – ٣)، $\text{أ} \neq ٠$

$$= \frac{١}{\text{أ}^{٣} \times \text{أ}^{٥}}$$

$= \frac{١}{\text{أ}^{٣+٥}}$ حسب الخاصة (١) من النظرية (٧ – ١)

$$= \frac{١}{\text{أ}^{٨}} = \text{أ}^{-٨} = \text{أ}^{(-٣)+(-٥)}$$

أي أن : $\text{أ}^{-٣} \times \text{أ}^{-٥} = \text{أ}^{(-٣)+(-٥)}$

(٢) $(\text{أ} \,.\, \text{ب})^{-٢} = \frac{١}{(\text{أ} \,.\, \text{ب})^{٢}} = \frac{١}{\text{أ}^{٢} \,.\, \text{ب}^{٢}} = \frac{١}{\text{أ}^{٢}} \times \frac{١}{\text{ب}^{٢}} = \text{أ}^{-٢} \,.\, \text{ب}^{-٢}$

(٣) $(\text{أ}^{-٢})^{-٣} = \frac{١}{(\text{أ}^{-٢})^{٣}} = \frac{١}{(\frac{١}{\text{أ}^{٢}})^{٣}} = \frac{١}{\frac{١}{(\text{أ}^{٦})}} = \text{أ}^{٦}$

أي أن : $(\text{أ}^{-٢})^{-٣} = \text{أ}^{-٢ \times -٣}$

(٤) $\frac{\text{هـ}^{٥}}{\text{هـ}^{-٣}} = \text{هـ}^{٥} \times \text{هـ}^{٣} = \text{هـ}^{٥+٣}$

وهذا يعني أن $\frac{\text{هـ}^{٥}}{\text{هـ}^{-٣}} = \text{هـ}^{٥-(-٣)}$

مثـال (٧-٥) :

أوجد الجواب بأبسط صورة :

(١) $(\sqrt{٣})^{-٣} \times (\sqrt{٣})^{-٢} \times (\sqrt{٣})^{٩}$

(٢) $\left(\frac{أ^{-٣}}{ب^{-٤}}\right)^{-٣} \times ب^{١٢}$ ، أ ، ب $\neq$ ٠

الحـــــــــــــل :

(١) $(\sqrt{٣})^{-٣} \times (\sqrt{٣})^{-٢} \times (\sqrt{٣})^{٩} = ((\sqrt{٣})^{-٣} \times (\sqrt{٣})^{-٢}) \times (\sqrt{٣})^{٩}$

$= (\sqrt{٣})^{-٥} \times (\sqrt{٣})^{٩}$

$= (\sqrt{٣})^{٤}$

$= \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

$= ٣ \times ٣ = ٩$

(٢) $\left(\frac{أ^{-٣}}{ب^{-٤}}\right)^{-٣} \times ب^{١٢} = \frac{أ^{٩}}{ب^{١٢}} \times ب^{١٢}$

$= أ^{٩} \times ب^{١٢-١٢} = أ^{٩} \times ب^{٠} = أ^{٩}$

ملحوظة (٧ - ١) :

لاحظ أنَّ : $أ^{ن} . أ^{م} . أ^{هـ} = (أ^{ن} . أ^{م}) . أ^{هـ}$

$= أ^{(ن+م)} . أ^{هـ}$

$= أ^{(ن+م)+هـ} = أ^{ن+م+هـ}$

وبصورة عامة :

إذا كانت : $ن_١$ ، $ن_٢$ ، .... ، $ن_ر \in ص$ فإنَّ :

$أ^{ن_١} \times أ^{ن_٢} \times .... \times أ^{ن_ر} = أ^{ن_١ + ن_٢ + ... + ن_ر}$

مثال (٧-٦) :

اختصر : $م = \frac{٤^{ن-٥} \times ٩^{ن-٢} \times ٢^{ن-٢}}{(٣^{ن-٣})^{٢} \times ٨^{ن-٤}}$

الحـــــــــل :

$$م = \frac{(٢^{٢})^{ن-٥} \times (٣^{٢})^{ن-٢} \times ٢^{ن-٢}}{٣^{٢(ن-٣)} \times (٢^{٣})^{ن-٤}}$$

$$= \frac{٢^{٢ن-١٠} \times ٣^{٢ن-٤} \times ٢^{ن-٢}}{٣^{٢ن-٦} \times ٢^{٣ن-١٢}}$$

$$= ٢^{٢ن-١٠} \times ٢^{ن-٢} \times ٢^{-٣ن+١٢} \times ٣^{٢ن-٤} \times ٣^{-٢ن+٦}$$

$$= ٢^{٢ن-١٠+ن-٢-٣ن+١٢} \times ٣^{٢ن-٤-٢ن+٦}$$

$$= ٢^{٠} \times ٣^{٢}$$

$$= ٩$$

مثال (٧-٧) :

أثبت أن : $\frac{٥ \times ٢^{٢ن} - ٤ \times ٢^{٢ن-١}}{٢ \times ٢^{٢ن+١} - ٢^{٢ن}} = ١$

الحـــــــــل :

بما أن : $٤ \times ٢^{٢ن-١} = ٢^{٢} \times ٢^{٢ن-١} = ٢^{٢ن+١} = ٢ \times ٢^{٢ن}$

فالطرف الأيمن = $\frac{٥ \times ٢^{٢ن} - ٢ \times ٢^{٢ن}}{٢ \times ٢ \times ٢^{٢ن} - ٢^{٢ن}}$

$$= \frac{٢^{٢ن}(٥-٢)}{٢^{٢ن}(٤-١)}$$

$= ٢^{٢ن-٢ن} \times \frac{٣}{٣} = ٢^{٠} \times ١ = ١$ = الطرف الأيسر .

مثـال (٧-٨) :

اكتشف العلماء أن المادة تتحوّل إلى طاقة ، والمعادلة التي اكتشفها (آينشتاين) للعلاقة بين الطاقة وكتلة المادة المعادلة لها هي : الطاقة = $ك \times ع_{ض}^{٢}$

حيث: $ك$ الكتلة مقدرة بالكيلو غرام، $ع_{ض}$ سرعة الضوء وتساوي $٢,٩٩ \times ١٠^{٨}$ م/ ث وحينئذٍ تكون الطاقة مقدرة بالجول .

أوجد الطاقة التي تعادل إلكتروناً واحداً . علماً بأن كتلة الإلكترون هي : (٩×١٠^{-٣١}) كلغ .

الحـــــــــل :

الطاقة = $ك \times ع_{ض}^{٢}$

$$= (٩ \times ١٠^{-٣١}) \times (٢,٩٩ \times ١٠^{٨})^{٢}$$

$$= ٩ \times ١٠^{-٣١} \times (٢,٩٩)^{٢} \times ١٠^{١٦}$$

$= ٨٠,٤٦٠٩ \times ١٠^{-١٥}$ جولاً $= ٨,٠٤٦٠٩ \times ١٠^{-١٤}$ جولاً .

مثـال (٧-٩) :

قطرا الشمس والقمر هما على الترتيب: $١,٣٩ \times ١٠^{٦}$ كلم، $٣,٤٨ \times ١٠^{٣}$ كلم

أوجد نسبة قطر الشمس إلى قطر القمر .

الحـــــــــل :

$$\frac{\text{قطر الشمس}}{\text{قطر القمر}} = \frac{١,٣٩ \times ١٠^{٦}}{٣,٤٨ \times ١٠^{٣}}$$

$$= \frac{١٣,٩}{٣,٤٨} \times ١٠^{٥-٣}$$

$$\approx (٣,٩٩ \times ١٠^{٢}) : ١$$

$$= \frac{٣٩٩}{١}$$

(٤) الأعــداد الـمـقـربــة :

رأينا من خلال المثال (٧ – ١) والتمارين (٧ – ١) أن أيًّا من الأعداد العلمية يكتب عادة على الصورة :

> هـ × ١٠^{ن} حيث ١ ≤ هـ < ١٠ ، ن عدد صحيح

وعندما أوردنا سرعة الضوء فإننا كتبناها تارةً : ٣ × ١٠^{٨} م/ ث وتارة أخرى كتبناها : ٢,٩٩ × ١٠^{٨} م/ ث ، فالأمر يرجع إلى التقريب المطلوب، إذ بالحالة الأولى قربناها إلى رقم معنوي واحد وهو ٣ ، أما بالحالة الثانية فقد قربناها إلى ثلاثة أرقام معنوية هي أرقام العدد ٢,٩٩، وواضح أن ٢,٩٩ ≈ ٣

والرقم المعنوي في عدد ما هو أي رقم لا يساوي صفراً، أو أي صفرٍ لا يكون القصد من إثباته هو تحديد موضوع الفاصلة العشرية.

ففي الأعداد التالية، الأرقام المعنوية هي الأرقام المكتوبة باللَّون الأحمر :

٥٠٠٢ ، ٠,٤٠٢٠ ، ٠,٠٠٠٦٠ ، ٢٣٠,٠

والعدد ٥٤٠٠ مثلاً يكتب :

٥,٤ × ١٠^{٣} في حالة عدم وجود أي صفر معنوي (هنا يوجد رقمان معنويان).

٥,٤٠ × ١٠^{٣} في حالة وجودصفر معنوي واحد (هنا يوجد ثلاثة أرقام معنوية).

٥,٤٠٠ × ١٠^{٣} في حالة وجود صفرين معنويين (هنا يوجد أربعة أرقام معنوية).

مثـال (٧-١٠) :

أوجد برقمين معنويين القيم المقرَّبة للأعداد الآتية واكتبها بطريقة كتابة الأعداد العلمية:

٤٤٦٠٠٠٠ ، ٠,٠٠٨٦٠١ ، ٠,٠٠٠٠٤٦٥٢ ، ٠,٠٠٠٨٩٨

الحـــــــــل :

$$٤٤٦٠٠٠٠ \approx ٤٥٠٠٠٠٠ = ٤,٥ \times ١٠^{٦}$$

$$٠,٠٠٨٦٠١ \approx ٠,٠٠٨٦ = ٨,٦ \times ١٠^{-٣}$$

$$٠,٠٠٠٠٤٦٥٢ \approx ٠,٠٠٠٠٤٧ = ٤,٧ \times ١٠^{-٥}$$

$$٠,٠٠٠٨٩٨ \approx ٠,٠٠٠٩٠ = ٩,٠ \times ١٠^{-٤}$$

ملحوظة (٧ - ٢)

في المثال (٧ – ٨) كان الجواب ($٨,٠٤٦٠٩ \times ١٠^{-١٤}$ جولاً) مقدراً بستة أرقام معنوية، ويصبح (٨×١٠^{-١٤} جولاً) عند تقديره برقم معنوي واحد .

تـــمـــاريـــن (٧ ـــ ٣)

في التمارين من ١ إلى ٦ اختر من بين الإجابات أ، ب ، جـ الإجابة الصحيحة :

(١) لكل س ∈ ح – {٠} فإن : $س^{ن} \times س^{-ن} = \square$

أ : (س) ، ب : (١) ، جـ : (مقداراً غير معرَّف).

(٢) $\frac{١}{س^{٢} + ص^{٢}} = \square$ حيث : س ≠ ٠ ≠ ص

أ : $(س^{٢} + ص^{٢})^{-١}$ ، ب : $(س^{-٢} + ص^{-٢})$ ، جـ : $(س + ص)^{-٢}$

(٣) $\frac{١}{س^{٣} ص^{٣}} = \square$ حيث : س ٠ ص ≠ ٠

أ : $(س ص)^{٣}$ ، ب : $(س . ص)^{-٣}$ ، جـ : $(س^{-٣} ص^{٣})$

(٤) جـ ∈ ح – {٠، ١} $جـ^{ن} = ١ \Leftarrow ن = \square$

أ : (١) ، ب : (–١)، جـ : (٠)

(٥) إذا كانت ء ≠ هـ ، $\{$ء ، هـ$\} \cap \{$٠ ، ١$\} = \varnothing$

ء^{ن} = هـ^{ن} ⟸ ن = ☐

أ : (٠) ، ب : (١) ، جـ : (−١) .

(٦) العدد (٠,٠٠٠٩٩٥) بتقريبه إلى رقمين معنويين يكون مساوياً :

أ : (٩,٩ × ١٠$^{-٤}$) ، ب : (١,٠ × ١٠$^{-٣}$) ، جـ : (٠,١٠ × ١٠$^{-٣}$)

اكتب الأعداد الآتية بطريقة كتابة الأعداد العلمية مقرباً الجواب إلى : رقم معنوي واحد ، ثم إلى رقمين معنويين .

(٧) الحرارة الكامنة لانصهار الجليد = ٣٣٣١٨٨ جول/ كيلوغرام.

(٨) الحرارة الكامنة لانصهار الذهب = ٦٤٣٧٢ جول/ كيلو غرام.

(٩) الحرارة الكامنة لتبخير الماء = ٢٢٥٥٠٠٠ جول/ كيلوغرام.

(١٠) معامل التمدد الحقيقي لزيت الزيتون = ٠,٠٠٠٦٨ / °س

أوجد ناتج كلٍّ مما يلي :

(١١) $\frac{أ^{٥}}{ب^{-٢}} \div \frac{أ^{-٣}}{ب^{٤}}$

(١٢) (٢س^{٢}ص$^{-١}$)^{٣} (٣س$^{-٣}$ص)$^{-٢}$

(١٣) (أ^{ن} + ب$^{-ن}$) (أ$^{-ن}$ + ب^{ن})

(١٤) $\frac{س^{-١} + س^{-٢}}{س^{-٢} - س^{-١}}$

ضع كلاًّ مما يلي بأبسط صورة :

(١٥) $\frac{٣٦^{(٢س + ٣)} \times ٨^{(س + ١)}}{٨١^{(س + ٢)} \times ١٢٨^{(س + ١)}}$

(١٦) $\frac{(٤,٢ \times ١٠^{-٣}) \times (٥,١ \times ١٠^{-٢})}{(٦,١ \times ١٠^{-٦}) \times (٠,٥ \times ١٠^{٠})}$

(١٧) $\frac{٢^{٤ن+٣} + ٤^{٢ن}}{٥ \times ٢^{٤ن} - ٤^{٢ن+١}}$

(١٨) احسب الزمن اللازم لكي تقطع نبضة الكومبيوتر مسافة ٧٢ سم إذا علمت أن سرعة انتقال النبضة هي $٤,٢ \times ١٠^{١٠}$ سم/ ث.

٧ - ٢ الجــــــذور:

(١) الجــذور التربيعيَّة

عند دراستنا للأعداد الحقيقية، في الصف الثالث المتوسط، تعرَّفنا على الجذور التربيعيَّة.

فالعدد ٥ هو جذر تربيعيّ للعدد ٢٥ لأن $(٥)^٢ = ٢٥$

والعدد ٥- هو جذر تربيعيّ آخر للعدد ٢٥ لأن $(-٥)^٢ = ٢٥$

وكذلك فإن كلاًّ من $\frac{٣}{٤}$ ، $-\frac{٣}{٤}$ جذر تربيعيّ للعدد (لمـاذا ؟)

وإن كلاًّ من العددين الحقيقيين $\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ هو جذر تربيعيّ للعدد ٣ لأن :

$(\sqrt{٣})^٢ = (-\sqrt{٣})^٢ = ٣$

ولو طلب منك إيجاد الجـذر التربيعيّ للعـدد (٤٩-) في مجموعـة الأعداد الحقيقية ح ، فلن تجد في هذه المجموعة أي عددٍ يكون مربَّعه (٤٩-)، لأنك تعلم أن مربَّع أي عدد حقيقي هو عدد غير سالب، ولو أردت الحصول على الجذر التربيعيّ للعدد (٠) في ح ، فسوف تجد أنَّه العدد (٠) لأن : $(٠)^٢ = ٠$

لعلَّك تذكَّرت من خلال هذه الأمثلة أنُّه :

- للعدد الحقيقي الموجب أ جذران تربيعيَّان هما $\sqrt{أ}$ ، $-\sqrt{أ}$
- ليس للعدد السالب جذر تربيعيّ في ح .
- الجذر التربيعيّ للعدد (صفر) هو (صفر) .

ولا تنس أنه :

> إذا لم يُسبَق رمز الجذر التربيعيّ ($\sqrt{\ }$) بأيّة إشارة، فالمقصود أن هذا الجذر مسبوق بإشارة +

مثلاً $\sqrt{٢٥}$ يعني + $\sqrt{٢٥}$ = ٥، والعدد − $\sqrt{٩}$ يقصد به الجذر التربيعي السالب للعدد ٩ وهو ٣−.

أي أنّه :

بفرض أ > ٠ فإن $\sqrt{\text{أ}}$ هو عدد موجب

وعليه يكون مثلاً :

$\sqrt{(+٣)^{٢}}$ = $\sqrt{٩}$ = + ٣ وهذا يعني : $\sqrt{(+٣)^{٢}}$ = | + ٣ |

$\sqrt{(-٤)^{٢}}$ = $\sqrt{١٦}$ = + ٤ وهذا يعني : $\sqrt{(-٤)^{٢}}$ = | −٤ |

وهذا يذكِّرك بما سبق أن تعلَّمته وهو :

> إذا كان أ ∈ ح فإن $\sqrt{(\text{أ})^{٢}}$ = | أ | .

ولعلك تذكر أخيراً أنَّه :

> إذا كان أ ، ب ، جـ ، .... ، هـ ∈ ح⁺ فإنَّ :
>
> (١) $\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{أ} \times \text{ب}}$
>
> وبصورة عامة $\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}} \times \sqrt{\text{جـ}} \times \cdots \times \sqrt{\text{هـ}} = \sqrt{\text{أ} \times \text{ب} \times \text{جـ} \times \cdots \times \text{هـ}}$
>
> (٢) $(\sqrt{\text{أ}^{\text{م}}})^{\text{ن}} = (\sqrt{\text{أ}^{\text{ن}}})^{\text{م}} = \sqrt{\text{أ}^{\text{م} \times \text{ن}}} = (\sqrt{\text{أ}})^{\text{م} \times \text{ن}}$ ، م ، ن ∈ ص
>
> (٣) $\frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$

مثال (٧-١١) :

أوجد نتائج ما يلي إن أمكن :

$\sqrt{\frac{١٢١}{١٤٤}}$ ، $\sqrt{١٢٥}$ ، $\sqrt{(-\frac{٢}{٣})^٢}$ ، $\sqrt{س^٢ ص^٢}$

$-\sqrt{٠,٠٩}$ ، $\sqrt{أ^٤ ب^٢ هـ}$ (هـ ≥ ٠) ، $(\sqrt{٣})^٤$ ، $\sqrt{-١٤٤}$

الحـــــــــل :

$\sqrt{\frac{١٢١}{١٤٤}} = \frac{١١}{١٢}$ ، $\sqrt{١٢٥} = \sqrt{٢٥ \times ٥} = ٥\sqrt{٥}$

$\sqrt{(-\frac{٢}{٣})^٢} = |-\frac{٢}{٣}| = \frac{٢}{٣}$ ، $\sqrt{س^٢ ص^٢} = |س ص|$

$-\sqrt{٠,٠٩} = -\sqrt{(٠,٣)^٢} = ٠,٣-$ ، $\sqrt{أ^٤ ب^٢ هـ} = أ^٢ |ب| \sqrt{هـ}$

$(\sqrt{٣})^٤ = \sqrt{٣^٤} = \sqrt{٨١} = ٩$

$\sqrt{-١٤٤}$ غير ممكن لأن العدد السالب ليس له جذر تربيعيّ في ح .

مثال (٧-١٢) :

(أ) ضع المقدار : $\frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ في أبسط صورة .

(ب) أثبت أنَّ : $\sqrt{٥ + ٢\sqrt{٦}} = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

الحـــــــــل :

(أ) نقوم بإنطاق المقام فنضرب كلاًّ من حدَّي الكسر بمرافق المقام :

$$\frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}} = \frac{(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})}{(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})}$$

$$= \frac{(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٢}}{٣ - ٢} = \frac{٣ + ٢\sqrt{٣}\sqrt{٢} + ٢}{١}$$

$$= ٥ + ٢\sqrt{٦}$$

(ب) لاحظ أن : $٥ + ٢\sqrt{٦} = ٣ + ٢\sqrt{٣ \times ٢} + ٢$

$$= (\sqrt{٣})^{٢} + ٢\sqrt{٣}\sqrt{٢} + (\sqrt{٢})^{٢}$$

فهو مربَّع كامل .

$$= (\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٢}$$

فيكون : $\sqrt{٥ + ٢\sqrt{٦}} = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

ملحوظة (٧ - ٣) :

على نسق ما أجريناه في الفقرة (ب) من المثال (٧ – ١٢) ، إذا كان أ ، ب $\in$ ح$^{+}$ ، فإن $\sqrt{(\text{أ} + \text{ب}) + ٢\sqrt{\text{أ} . \text{ب}}} = \sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}}$

وكذلك فإنَّ : $\sqrt{(\text{أ} + \text{ب}) - ٢\sqrt{\text{أ} . \text{ب}}} = |\sqrt{\text{أ}} - \sqrt{\text{ب}}|$

مثال (٧-١٣) :

لحل المعادلة س^{٢} = ٦٤ في مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، نبحث عن عدد حقيقي مربَّعه ٦٤ فنلاحظ أن كلاًّ من العددين + ٨ ، ٨– يحقق ذلك ، فلهذه المعادلة حلَّان هما : + ٨ ، ٨– أي : $+\sqrt{٦٤}$ ، $-\sqrt{٦٤}$

مثال (٧-١٤) :

أوجد الناتج في كلٍّ مما يلي :

$\sqrt{٥١٨٤}$ ، $\sqrt{٠,٠١٦٩}$ ، $\frac{\sqrt{٢١٦}}{\sqrt{١٥٠}}$ ، $\sqrt{٧٢} - \sqrt{٥٠}$

الحـــل :

$$\sqrt{٥١٨٤} = \sqrt{٢^{٦} \times ٣^{٤}} = ٢^{٣} \times ٣^{٢} = ٧٢$$

$$\sqrt{٠,٠١٦٩} = \sqrt{\frac{١٦٩}{١٠٠٠٠}} = \frac{١٣}{١٠٠} = ٠,١٣$$

$$\frac{\sqrt{٢١٦}}{\sqrt{١٥٠}} = \sqrt{\frac{٢١٦}{١٥٠}} = \sqrt{\frac{٣٦}{٢٥}} = \frac{٦}{٥}$$

$$\sqrt{٧٢} - \sqrt{٥٠} = ٦\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$$

مثـــال (٧-١٥) :

أوجد الجذرين التربيعيَّين : $\sqrt{١٠١٦٠٦٤}$ ، $\sqrt{٠,٠٠١٢٢٥}$

(١) بالتحليل إلى العوامل .

(٢) باستعمال الآلة الحاسبة.

الحـــل :

(١) $١٠١٦٠٦٤ = ٢^{٨} \times ٣^{٤} \times ٧^{٢} = (٢^{٤} \times ٣^{٢} \times ٧)^{٢}$

$$\sqrt{١٠١٦٠٦٤} = \sqrt{(٢^{٤} \times ٣^{٢} \times ٧)^{٢}} = ٢^{٤} \times ٣^{٢} \times ٧ = ١٠٠٨$$

$$\sqrt{٠,٠٠١٢٢٥} = \sqrt{١٢٢٥ \times ١٠^{-٦}}$$

$$= \sqrt{٥^{٢} \times ٧^{٢} \times ١٠^{-٦}}$$

$$= \sqrt{(٥ \times ٧ \times ١٠^{-٣})^{٢}} = ٥ \times ٧ \times ١٠^{-٣} = ٠,٠٣٥$$

(٢) باستخدام الآلة الحاسبة نضغط على الأزرار المناسبة فنجد أن :

$$\sqrt{١٠١٦٠٦٤} = ١٠٠٨ \quad ، \quad \sqrt{٠,٠٠١٢٢٥} = ٠,٠٣٥$$

ملحوظة (٧ - ٤) :

لعلَّك تلاحظ من المثال (٧ – ١٥) أن $\sqrt{ب^{ن}}$ (إذا كان ن عدداً صحيحاً زوجياً) هو $|ب|^{\frac{ن}{٢}}$ وبصورة عامة يكون :

$$\sqrt{أ^{٢هـ} \times ب^{٢ن} \times \cdots\cdots \times جـ^{٢م}} = |أ|^{هـ} \times |ب|^{ن} \times \cdots\cdots \times |جـ|^{م}$$

حيث : $هـ ، ن ، \ldots\ldots ، م \in ص$

(٢) مــن تــراثــنــا المُــشــــرق :

وإذا كنا بصدد تقديم الجذور إلى طلابنا الأحبة ، فإنه لابد لنا من تذكيرهم بما في تراثنا المشرق، خلال العصر الذهبي لحضارتنا الإسلامية من أثر كبير في ابتكار العديد من المفاهيم والرموز والمصطلحات الواردة في علم الجبر عامة وفي ماورد في هذا البند من مفاهيم بصورة خاصة .

فإذا كانت كلمة (الجبر) التي أطلقها العالم الرياضي المسلم محمد بن موسي الخوارزمي (١٦٤ ـ ٢٣٥هـ) من خلال كتابه (الجبر والمقابلة) قد أخذت مكانها في مختلفِ لغات العالم بلفظتها العربية فإنَّ مفاهيم أخرى ، لنا ـ نحن المسلمين ـ الفضل في إيجادها اكتشافاً، أو ابتكاراً ، أو نقلاً من حضارات سالفة بعد التعديل الذي أعطاها الروح والمرونة.

نذكر على سبيل المثال لا الحصر أنَّ مصطلح (جذر) في الجبر يعود في أصله إلى اللغة العربية، إذ أن الخوارزمي قسَّم الكميات الجبرية إلى ثلاثة أنواع :

جذر ويقصد به س ، ومال ويقصد به $س^{٢}$ ، ومفرد وهو العدد (أي الكميّة الخالية من س) .

كما كان الخوارزمي على دراية متينة بالقواعد الجبرية لإجراء عملية الضرب والقسمة على الجذور فإنه يقول مثلاً في كتابه (الجبر والمقابلة) :

«لِضرب جذر كذا في جذر كذا : ضربت أحد العددين في الآخر وأخذت جذر المبلغ» وهذا يعني : $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ \times ب}$.

كما جاء في كتابه هذا قوله : «إن أردت أن تقسم جذر تسعة على جذر أربعة فإنك تقسم تسعة على أربعة فيكون اثنين وربعاً فجذرها هو ما يصيب الواحد وهو واحد ونصف» وهذا يعني :

$$\frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٤}} = \sqrt{\frac{٩}{٤}} = \sqrt{٢\frac{١}{٤}} = ١\frac{١}{٢} \text{ فقد طبق القاعدة } \sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$$

وإن رمز الجذر التربيعي ($\sqrt{\quad}$) إنما كان من ابتكارنا، إنه الحرف جـ (أول حرف من كلمة جذر العربية) ويبدو أن أول من استعمله لهذا الغرض هو « أبو الحسن علي بن محمد القلصادي ، الأندلسي، (٨٢٥ – ٨٩١هـ) » فمثلاً $\overset{جـ}{٢٥}$ تعني $\sqrt{٢٥}$ وهكذا بقيت الجيم العربية نفسها مستعملة كرمز للجذر في مختلف لغات العالم، ففي مختلف اللُّغات الأوروبية تجد مثلاً : $\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{36} = 6$ ......

وإن علماءنا هم أول من أدخل ضمن مصطلحات الرياضيات مفهوم الجذر الأصم ويقصدون به جذر العدد الذي لا يكون مربعاً مثل $\sqrt{٢}$ ، وإنهم برعوا في إيجاد علاقات بين الجذور الصم فالعلاقة : $\sqrt{أ} \pm \sqrt{ب} = \sqrt{أ + ب \pm ٢\sqrt{أ \times ب}}$ التي أوردناها في الملحوظة (٧ – ٣) يظهر لنا من النصوص التاريخية أن أول من أوجدها هو أبو كامل شجاع بن أسلم المصري (٢٣٦ – ٣١٨هـ) .

كما أن القلصادي شرح بدقة متناهية طريقة إيجاد القيمة التقريبية للجذر التربيعي لأي عدد معطى .

ومن الثابت أن العالم الرياضي المسلم السموأل المغربي (توفي في بغداد عام ١١٧٥م) هو أول من استعمل الأسس السالبة.

تـــمـــاريـــن (٧ ــ ٤)

ضع كلاًّ مما يلي بأبسط صورة (التمارين من ١ إلى ٩) .

(١) $\sqrt{٧٥} - \sqrt{٢٧}$ (٢) $\sqrt{٨ ب^٤} - ٢ ب^٢$

(٣) $\sqrt{١٦ س^٢ + ٩ س^٢}$ (٤) $\sqrt{س^٢ - ١٠ س + ٢٥}$

(٥) $(\sqrt{س} - ٢)^٢ + ٢\sqrt{س}$ (س عدد حقيقي غير سالب).

(٦) $(٢\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(٢\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$

(٧) $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$

(٨) $\frac{١}{\sqrt{٨}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٩) $\sqrt{(أ)^٥}$ ، $أ > ٠$

حوِّل إلى مجموع جذرين أو فرق جذرين :

(١٠) $\sqrt{٢٠ + ٢\sqrt{٧٥}}$ ، (١١) $\sqrt{٩ - ٢\sqrt{٢٠}}$

طبِّق طريقة أبي كامل المصري في جمع (أو طرح) الجذور الصم :

(١٢) $\sqrt{٦} + \sqrt{٢}$ ، (١٣) $\sqrt{١٠} - \sqrt{٣}$

(١٤) اتخذ السنتمتر وحدة لقياس الأطوال، وحدِّد على خط الأعداد الأطوالَ التي تمثِّل كلاًّ من :

$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٤}$ ، $\sqrt{٥}$ على الشكل نفسه .

أوجد الجذور التربيعية الآتية :

(١) بدون استخدام الآلة الحاسبة (٢) باستخدام الآلة الحاسبة.

(١٥) $\sqrt{٢,٥٦ \times ١٠^٦}$ (١٦) $\sqrt{١٩٤٤٨١}$

(١٧) $\sqrt{٠,٠٠٢٩١٦}$ (١٨) $\sqrt{١٠٠ + ٥٧٦}$

(٣) الجذر التكعيبي :

إن مكعب العدد ٢ هو ٨ أي أن $٢^{٣} = ٨$.

فنقول : إنَّ العدد ٢ هو الجذر التكعيبي للعدد ٨ ونكتب : $\sqrt[٣]{٨} = ٢$.

وكذلك فإنَّ : $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$ لأنَّ $٣^{٣} = ٢٧$.

وإنَّ : $\sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$ لأنَّ $(-٤)^{٣} = -٦٤$

تعريف (٧-٤):

الجذر التكعيبي لعدد حقيقي أ هو عدد حقيقي ب يحقِّق العلاقة : $ب^{٣} = أ$

أي أن : $\sqrt[٣]{أ} = ب \Leftrightarrow ب^{٣} = أ$.

ولعلَّك تلاحظ أنَّه :

لكل عدد حقيقي موجب جذر تكعيبي موجب .

ولكل عدد حقيقي سالب جذر تكعيبي سالب.

وأن : $\sqrt[٣]{٠} = ٠$

ملحوظة (٧-٥):

١) كما هي الحال في الجذور التربيعية فإن :

$$\sqrt[٣]{أ \times ب \times \dots\dots \times ن} = \sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{ب} \times \dots\dots \times \sqrt[٣]{ن}$$

$$\sqrt[٣]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[٣]{أ}}{\sqrt[٣]{ب}} \qquad ب \neq ٠$$

٢) $\sqrt[٣]{-أ} = -\sqrt[٣]{أ}$ (لماذا ؟) .

٣) إذا كان ن قابلاً القسمة على ٣ فإن : $\sqrt[٣]{أ^{ن}} = أ^{\frac{ن}{٣}}$ (لماذا؟) .

مثال (٧-١٦) :

أوجد الجذر التكعيبي :

(١) $\sqrt[٣]{١٣,٨٢٤}$ (٢) $\sqrt[٣]{١٠٨٠}$ (٣) $\sqrt[٣]{-٢٠٠}$

الحـــل :

(١) $\sqrt[٣]{١٣,٨٢٤} = \sqrt[٣]{٢^{٩} \times ٣^{٣} \times ١٠^{-٣}} = ٢^{٣} \times ٣^{١} \times ١٠^{-١} = ٢,٤$

(٢) $\sqrt[٣]{١٠٨٠} = \sqrt[٣]{٣^{٣} \times ٢^{٣} \times ٥} = ٣ \times ٢ \sqrt[٣]{٥} = ٦ \sqrt[٣]{٥}$

(٣) $\sqrt[٣]{-٢٠٠} = \sqrt[٣]{٢^{٣} \times ٥^{٢}} = -٢\sqrt[٣]{٥^{٢}} = -٢\sqrt[٣]{٢٥}$

ملحوظة (٧ - ٦) :

في المثال (٧-١٦) رأينا أنه إذا كان أحد الأسس لا يقبل القسمة على ٣ فإن طريقة إيجاد الجذر التكعيبي بتحليل العدد إلى عوامله الأولية، لا تعطي ناتج الجذر بل تبسّطه، ولو استعملنا الآلة الحاسبة لحصلنا على قيمة مقرَّبة لهذا الجذر .

فالعدد $\sqrt[٣]{٥}$ مثلاً هو عدد حقيقي، وقيمته المقرَّبة باستخدام الآلة الحاسبة هي: ١,٧٠٩٩٧٥٩ والجواب مقرَّب إلى ٨ أرقام معنوية (٧ أرقام عشرية)

(٤) الجذر النوني :

تعـــريــف (٧ - ٥) :

إذا كان ا ∈ ح، ن ∈ ط − {١} فإنَّ كلَّ عدد حقيقي س يحقِّق المعادلة :

$س^{ن} = ا$ يسمَّى جذراً نونياً للعدد ا .

نرمز للجذر النوني للعدد ا بالرمز $\sqrt[ن]{ا}$ أو $ا^{\frac{١}{ن}}$

نسمِّي ا المجذور ، ن دليل الجذر .

نستنتج من هذا التعريف :

١) $\sqrt[\text{ن}]{٠} = ٠$

٢) إذا كان ن زوجياً وكان أ موجباً ، فإن للمعادلة $\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}$ جذرين هما :

$\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ ، $-\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ أي أن للعدد في هذه الحالة جذرين نونيِّين .

٣) إذا كان ن زوجياً وكان أ سالباً، فإنه لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة :

$\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}$ ، أي أنه : لا يوجد جذر نوني للعدد أ في هذه الحالة.

٤) إذا كان ن فردياً ، فإنه يوجد عدد حقيقي واحد $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ يحقق المعادلة :

$\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}$ ، أي أن للعدد أ جذراً نونياً واحداً في هذه الحالة .

ملحوظة (٧ - ٧) :

كما رأينا في الجذر التربيعيّ فإن دليل الجذر ٢ لا يكتب على يمين إشارة الجذر،

أي : $\sqrt[٢]{\text{أ}}$ تكتب $\sqrt{\text{أ}} = \text{أ}^{\frac{١}{٢}}$ (أ ≥ ٠)

(٥) خصائص الجذور :

وكما هو الحال في الجذور التربيعية والتكعيبية ، فإن للجذور بشكل عام الخصائص المبيَّنة بالنظرية التالية :

نظـــريـــة (٧-٣) :

إذا كان أ، ب ∈ ح ، ن ∈ ط −{١} فإنَّ :

(١) $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ} \cdot \text{ب}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \cdot \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$ (حيث أ ≥ ٠ ، ب ≥ ٠ إذا كان ن زوجياً).

(٢) $\sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}}$ حيث أ ≥ ٠، ب > ٠ إذا كان ن زوجياً .

إذا كان أ ∈ ح ، ب ∈ ح −{٠} إذا كان ن فردياً .

البـرهـــان :

سنكتفي بالبرهان على الخاصة الأولى ونترك برهان الخاصة الثانية للطالب .

تكون العلاقة $\sqrt[ن]{أ.ب} = \sqrt[ن]{أ}.\sqrt[ن]{ب}$ صحيحة فيما إذا أثبتنا أن $(\sqrt[ن]{أ}.\sqrt[ن]{ب})$ هو جذر نوني للمقدار أ . ب .

ويكون ذلك صحيحاً إذا كان : $(\sqrt[ن]{أ}.\sqrt[ن]{ب})^{ن} = أ . ب$.

وبالحقيقة :

$(\sqrt[ن]{أ}.\sqrt[ن]{ب})^{ن} = (\sqrt[ن]{أ})^{ن}.(\sqrt[ن]{ب})^{ن}$ حسب الفقرة ٣ من النظرية (٧-٢).

$= أ . ب$ حسب تعريف الجذر النوني .

ملحوظة (٧ - ٨) :

(١) يمكنك بسهولة أن تبرهن أنَّ :

$$\sqrt[ن]{أ × ب × جـ × ...... × هـ} = \sqrt[ن]{أ} × \sqrt[ن]{ب} × \sqrt[ن]{جـ} × ...... × \sqrt[ن]{هـ} \quad (١)$$

(٢) لو وضعنا أ = ب = جـ = ... = هـ وكان عدد هذه العوامل م لأصبحت العلاقة (١) :

$$\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} \quad (٢)$$

وحيث إن : $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{1}{ن}}$

تصبح العلاقة (٢) : $(أ^{م})^{\frac{1}{ن}} = (أ^{\frac{1}{ن}})^{م}$ (٣)

تعـــريـــــف (٧ - ٦) :

إذا كان أ $\in$ ح، م $\in$ ص ، ن $\in$ ط - {١} فإنَّ :

$$\left(\sqrt[ن]{أ}\right)^{م} = \left(\sqrt[ن]{أ^{م}}\right) = أ^{\frac{م}{ن}}$$

وبصورة أخرى فإن :

$$\left(أ^{\frac{١}{ن}}\right)^{م} = \left(أ^{م}\right)^{\frac{١}{ن}} = أ^{\frac{م}{ن}}$$

شريطة أن لا يكون أ سالباً إذا كان ن زوجياً .

مثـــال (٧-١٧) :

(١) $(-٢) = \sqrt[٣]{-٨} = (-٨)^{\frac{١}{٣}}$

(٢) $(٣٢)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{٢^{٥}} = ٢$

(٣) $(-٢٧)^{-\frac{١}{٣}} = \dfrac{١}{(-٢٧)^{\frac{١}{٣}}} = \dfrac{١}{\sqrt[٣]{-٢٧}} = \dfrac{١}{-٣} = -\dfrac{١}{٣}$

(٤) $(١٦)^{\frac{٣}{٤}} = \left(\sqrt[٤]{١٦}\right)^{٣} = ٢^{٣} = ٨$

(٥) $\left(\sqrt[٣]{٢}\right)^{١٢} = ٢^{\frac{١٢}{٣}} = ٢^{٤} = ١٦$

(٦) $٥^{٠{,}٨} = ٥^{\frac{٨}{١٠}} = ٥^{\frac{٤}{٥}} = \sqrt[٥]{٥^{٤}} = \sqrt[٥]{٦٢٥}$

(٧) $\sqrt[٥]{٥١٢} = \sqrt[٥]{٢^{٩}} = ٢^{\frac{٩}{٥}} = ٢^{١{,}٨}$

(٦) الأسس أعداد نسبيَّة أو حقيقيَّة :

أ) رأينا في التعريف (٧ – ٦) أن $\sqrt[ن]{أ^{م}}$ يكتب بالصيغة $أ^{\frac{م}{ن}}$ وهذا ما يقدم لنا تعريفاً لقوة أسُّها عدد نسبيّ، وإن فقرات المثال (٧ – ١٧) تبيَّن لك تبريراً لهذا التعريف.

فالقوى : $٢^{\frac{١}{٢}}$ ، $٢^{\frac{٦}{٥}}$ ، $٢^{\frac{١١٣}{١٠٠}}$ ، $٢^{\frac{٢١٧}{٥٠٠}}$ للعدد ٢

تعني : $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt[٥]{٢^{٦}}$ ، $\sqrt[١٠٠]{٢^{١١٣}}$ ، $\sqrt[٥٠٠]{٢^{٢١٧}}$

كما تعني : $٢^{٠,٥}$ ، $٢^{١,٢}$ ، $٢^{٠,١١٣}$ ، $٢^{٠,٤٣٤}$

ب) سنقبل بدون دراسة متعمِّقة أن الأُسّ يمكن أن يكون أي عدد حقيقي، نسبيّ ـ كما مرّ في الأمثلة السابقة ـ أو غير نسبيّ مثل $٣^{\sqrt{٢}}$ حيث الأُسّ $\sqrt{٢}$ هو كما نعلم عدد حقيقي (غير نسبيّ) يمكن معرفة قيمته المقرَّبة مثل :

١,٤ ، ١,٤١ ، ١,٤١٤ ، .... (حسب درجة التقريب المطلوبة)

وبالتالي فإنَّ ($٣^{\sqrt{٢}}$) يمكن معرفة قيمته المقربة مثل :

$٣^{١,٤}$ ، $٣^{١,٤١}$ ، $٣^{١,٤١٤}$ .... (حسب درجة التقريب المطلوبة) وإن القيمة الحقيقية (المضبوطة) له هي $٣^{\sqrt{٢}}$ (نقرؤها : ٣ أس $\sqrt{٢}$) وعليه فإن الأعداد التالية ، مثلاً ، هي أعداد حقيقية :

$٣^{\frac{٩}{٥}}$ ، $٣^{-١,٤}$ ، $٢^{\sqrt{٣}}$ ، $٤^{ط}$ ، $(\sqrt{٣})^{٢ط-١}$ ، $(٥^{\sqrt{٢}})^{\sqrt{٣}}$ ، $(\frac{١}{٤})^{\frac{٣ط}{٤}}$ ،

وسنقبل أن خصائص قوى عدد حقيقي التي أوردناها في النظرية (٧ – ٢) ، حيث كانت الأُسُس أعداداً صحيحة، تبقى نفسها إذا كانت الأُسُس أعداداً نسبيَّة أو حقيقيَّة .

مثال (٧-١٨) :

(١) $(٣^{\sqrt{٢}})^{\sqrt{٢}} = ٣^{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = ٣^{٢} = ٩$.

(٢) $ا^{(\sqrt{٣} - ١)} \times ا^{(\sqrt{٣} + ١)} = ا^{(\sqrt{٣} - ١) + (\sqrt{٣} + ١)} = ا^{٢}$

(٣) $٤^{\sqrt{٢}} = (٢^{٢})^{\sqrt{٢}} = ٢^{٢\sqrt{٢}}$

$\approx ٢^{٢ \times ١,٤} = ٢^{٢,٨} \approx ٦,٩٦٤٤$

وبدقَّة أكثر نجد : $٤^{\sqrt{٢}} = ٢^{٢\sqrt{٢}} \approx ٢^{٢ \times ١,٤١٤} = ٢^{٢,٨٢٨} \approx ٧,١٠٠٩$

(أجرينا الحساب بالآلـة الحاسبة التي تحتوي على زر X^{Y} وقد اكتفينا بأربعة أرقام عشرية) .

مثال (٧-١٩) :

أوجد $٥^{٢ + \sqrt{٣}} \div ٥^{٢ - \sqrt{٣}}$ ثم قرِّب الأس إلى ثلاثة أرقام معنويَّة وأوجد قيمة مقرَّبة للناتج بخمسة أرقام معنويَّة .

الحـــــــــل :

$$\frac{٥^{٢ + \sqrt{٣}}}{٥^{٢ - \sqrt{٣}}} = ٥^{٢ + \sqrt{٣} - (٢ - \sqrt{٣})}$$

$$= ٥^{٢\sqrt{٣}}$$

$$\approx ٥^{٢ \times ١,٧٣٢}$$

$$\approx ٥^{٣,٤٦٤} \approx ٥^{٣,٤٦}$$ وباستخدام الآلة الحاسبة .

$$\approx ٢٦٢,٠٨$$

مثال (٧-٢٠) :

أوجد $\sqrt{\sqrt[٣]{٧٢٩}}$

الحـــــــل :

$$\sqrt{\sqrt[٣]{٧٢٩}} = \left((٣^{٦})^{\frac{١}{٣}}\right)^{\frac{١}{٢}} = (٣^{٦})^{\frac{١}{٦}} = ٣^{١} = ٣$$

مثـال (٧-٢١) :

بسِّط $\dfrac{(٣س)^{\sqrt{٢٧}}}{س^{\sqrt{٣}}}$ ، (س $\neq$ ٠) ثم أوجد قيمة هذا المقدار عندما س = $٣^{-\frac{٣}{٢}}$

الحـــــــل :

$$\frac{(٣س)^{\sqrt{٢٧}}}{س^{\sqrt{٣}}} = \frac{(٣س)^{٣\sqrt{٣}}}{س^{\sqrt{٣}}} = \frac{\left((٣س)^{٣}\right)^{\sqrt{٣}}}{س^{\sqrt{٣}}} = \left(\frac{٢٧س^{٣}}{س}\right)^{\sqrt{٣}} = (٢٧س^{٢})^{\sqrt{٣}}$$

وعندما س = $٣^{-\frac{٣}{٢}}$ تصبح قيمة المقدار :

$$\left(٢٧(٣^{-\frac{٣}{٢}})^{٢}\right)^{\sqrt{٣}} = (٣^{٣} \times ٣^{-٣})^{\sqrt{٣}} = (١)^{\sqrt{٣}} = ١$$

تـــمــــاريـــن (٧ ــ ٥)

اكتب الأعداد التالية على صيغة جذور :

(١) $٣^{٠,٢٥}$ ، (٢) $٥^{٠,٧٥}$ ، (٣) $٢^{١,٢٥}$ ، (٤) $١٠^{١,٤}$ ، (٥) $٢٥^{\frac{٥}{٨}}$

بسِّط الجذور التالية ثم اكتب كلاًّ منها على هيئة قوة أسُّها عدد عشري :

(٦) $\sqrt[٤]{٢٧}$ ، (٧) $\sqrt[٦]{٣٢}$ ، (٨) $\sqrt{٢٧}$ ، (٩) $\sqrt[١٠]{٢٥٦}$

(١٠) خزَّان مكعب الشكل يسع ٩١١٢٥لتراً من الماء، كم متراً طول حرفه من الداخل.

بسِّط كلاًّ مما يلي :

(١١) $(٢^{\sqrt{٣}})^{\sqrt{٣}}$ ، (١٢) $(٢^{\sqrt{٣}-١})^{\sqrt{٥}}$ ، (١٣) $٥^{\sqrt{٢}-١} \times ٥^{\sqrt{٢}+١}$

(١٤) $\text{أ}^{(\sqrt{٣}-٢)} \div \text{أ}^{(\sqrt{٣}+٢)}$ ، (١٥) $٣^{٢\text{ط}} \times ٣^{٢\text{ط}+١}$ ، (١٦) $\sqrt{(\text{أ}\,.\,\text{ب})^{\sqrt{١٢}}}$

(١٧) $\sqrt{\text{ب}^{-١}}\,.\,\sqrt[٣]{\text{ب}^{-٢}}$ ، (١٨) $(٢^{\frac{١}{٣}} \times ٤^{\frac{١}{٣}}) \div ٨^{\frac{١}{٣}}$

(١٩) $(٣^{-٢} + ٤^{-٢})^{\frac{١}{٢}}$

اكتب كلاًّ مما يلي على صيغة قوَّة ذات أُسّ عشري مقرِّباً الأُسّ إلى ثلاثة أرقام عشريَّة:

(٢٠) $(-٥^{١\sqrt{٢}})^{٢}$ ، (٢١) $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{\sqrt{٣}}$ ،

(٢٢) $\sqrt{+١٠^{٢\sqrt{٣}}}$ ، (٢٣) $(+٨^{١\sqrt{٢}})^{٣}$

أوجد الجذور الآتية :

(أ) باستخدام الآلة الحاسبة . (ب) بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(٢٤) $\sqrt[٣]{-٤٦٦٥٦ \times ١٠^{٣}}$ ، (٢٥) $\sqrt[٤]{٦١,٤٦٥٦}$

(٢٦) $\sqrt[٥]{٥,٩٠٤٩ \times ١٠^{٦}}$

بسِّط كلاًّ مما يلي :

(٢٧) $\sqrt[٣]{\sqrt{٨}} \times \sqrt[٤]{٤}$ ، (٢٨) $\sqrt{\sqrt[٣]{٩}} \times \sqrt[٣]{\sqrt{٣}}$ ،

(٢٩) $\sqrt[٣]{\text{هـ}^{٢}} \times \sqrt{\text{هـ}^{٣}}$

(٣٠) $(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ص}^{\frac{١}{٢}})(\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{ص}^{\frac{١}{٢}})$ (٣١) $\left[(٣^{\sqrt[٣]{٢}})^{\sqrt[٣]{٢}}\right]^{\sqrt[٣]{٢}}$

(٣٢) $\dfrac{\left[(\text{س}^{\sqrt{٣}})^{\sqrt{٢}}\right]^{\frac{١}{\sqrt{٦}}}}{\left[\text{س}^{(\sqrt{٥}+٢)}\right]^{(\sqrt{٥}-٢)}}$

٧ - ٣ الدالة الأسية :

(١) الدالة الأسية :

لو بحثنا عن قيم مختلفة للقوة ٢ ^س^ وذلك بإعطاء المتغير س قيماً نسبية لحصلنا على جدول كالآتي :

س	-٣	-٢	-١	-٠,٥	٠	٠,٥	١	١,٥	٢
ص = ٢^س	٠,١٢٥	٠,٢٥	٠,٥	٠,٧ مقربة	١	١,٤ مقربة	٢	٢,٨ مقربة	٤

ولو مثّلنا مجموعة النقاط الحاصلة في المستوي الإحداثي لحصلنا على الشكل (٧ - ١أ) .

ولو أعطينا المتغير س قيماً حقيقية غير نسبية بالإضافة إلى هذه القيم مثل :

س = - ط ، - √٣ ، - √٢ ، √٢ ، √٣ ، .... لحصلنا على القيم المقربة:

٢^س = ٠,١ ، ٠,٣ ، ٠,٤ ، ٢,٧ ، ٣,٣ ، ....

وبإضافة النقط الممثلة لهذه القيم إلى النقط التي حصلنا عليها من الجدول السابق ، نحصل على الشكل (٧ - ١ب) حيث تجد النقط أصبحت متراصة ، ولو تابعنا التعويض بقيمٍ حقيقيّة أكثر لحصلنا على المنحني المرسوم بالشكل (٧ - ١جـ) .

شكل (٧ - ١أ)

شكل (٧ - ١ب)

شكل (٧ - ١جـ)

وبطريقة مماثلة نستطيع البحث عن القيم المختلفة للقوة $٣^{س}$ أو $٢^{-س}$ ، ......

إن كلاً من هذه القوى التي أساسها عدد حقيقي موجب وأسُّها متغيِّر حقيقي تمثّل دالةً مجالها ح ، ندعوها : دالة أسية ، وواضح أنه لو كان الأساس مساوياً ١ لأصبحت الدالة الأسية معرَّفة بالقاعدة : $١^{س} = ١$ فهي ذات قيمة ثابتة مهما كانت قيمة المتغير الحقيقي س . وبصورة عامة نعرِّف الدالة الأسية كما يلي :

تعـــريـــف (٧-٧) :

إذا كان العدد الحقيقي أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، فالدالة المعرَّفة على ح بالقاعدة ص = د(س) = $أ^{س}$ ، ندعوها دالة أسية أساسها أ .

مثـال (٧-٢٢) :

ارسم جزءاً من منحني الدالة المعرَّفة على ح بالقاعدة ص = $(\frac{١}{٣})^{س}$ ثم استفد من الشكل لإيجاد قيمة مقرَّبة للعدد $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

الحــــــــل :

$(\frac{١}{٣})^{س} = (٣^{-١})^{س} = ٣^{-س}$

س	ص
-١,٥	٥,٢ (مقربة)
-١	٣
٠	١
٠,٥	٠,٦ (مقربة)
١	$\frac{١}{٣}$
٢	$\frac{١}{٩}$

شكل (٧ - ٢)

العدد $\frac{١}{\sqrt[٥]{٣}}$ = $\quad$ = $(\frac{١}{٣})^{٠,٢}$

بالرجوع إلى الشكل (٧ – ٢) ، عند س = ٠,٢ نجد ص ≈ ٠,٨

(٢) بعض خصائص الدالة الأسية :

لو رجعنا إلى الشكل (٧ – ١ – جـ) الذي يمثِّل جزءاً من منحني الدَّالة المعرَّفة على ح بالقاعدة ص = $٢^{س}$ لوجدنا أن قيمة ص تتزايد بتزايد قيمة المتغير س ، فندعوها دالَّة متزايدة، بينما في الشكل (٧ – ٢) الذي يمثل جزءاً من منحني الدالّة المعرَّفة على ح بالقاعدة ص = $(\frac{١}{٣})^{س}$ ، نجد أن قيمة ص تتناقص بتزايد قيمة المتغيِّر س فندعوها دالة متناقصة .

ولو أعدنا الكرة ورسمنا عدداً من المنحنيات لدوال أسية أخرى حيث :

د (س) = $٣^{س}$ ، $(\sqrt{٢})^{س}$ ، $(\frac{١}{٢})^{س}$ ، .... لوجدنا :

١) إذا كان أ > ١ فإن الدالَّة د متزايدة، أي أن قيمتها تتزايد قيمة المتغيِّر س.

٢) إذا كان ١ > أ > ٠ فإن الدالَّة د متناقصة، أي أن قيمتها تتناقص بتزايد قيمة المتغيِّر س.

من جهة أخرى : فإن الدالَّة د عبارة عن تطبيق مجاله ح ومجاله المقابل $ح^{+}$ ومداه أيضاً $ح^{+}$ وحيث أن مجاله المقابل = مداه فهو تطبيق شامل (غامر) ونلاحظ من الشكلين (٧ – ١ – جـ) ، (٧ – ٢) أنَّه :

إذا كان $س_١ \neq س_٢$ فإن $أ^{س_١} \neq أ^{س_٢}$ وهذا يعني أن التطبيق متباين وبالتالي:

فإن التطبيق د : ح ← $ح^{+}$: د (س) = $أ^{س}$ هو تقابل

ينتج من ذلك : $أ^{س_١} = أ^{س_٢} \Leftrightarrow س_١ = س_٢$

مثـال (٧-٢٣) :

أوجد قيمة س إذا علمت أن : $١٢٥^{س} = ٥^{س^٢ +}$ (تحقق من صحة الإجابة).

الحـــــــــــل :

المعادلة المعطاة تكتب على الصورة : $٥^{٣س} = ٥^{س+٢}$

وحيث إنَّ الدالَّة الأسيَّة تقابُل فإنَّ :

$$٥^{٣س} = ٥^{س+٢} \Leftrightarrow ٣س = س+٢$$

$$\Leftrightarrow س = ١$$

التحقيق : $١٢٥^{س} = ٥^{س+٢}$ نضع س = ١

$$١٢٥^{١} \stackrel{?}{=} ٥^{١+٢}$$

$٥^{٣} = ٥^{٣}$ والإجابة صحيحة.

مثـال (٧-٢٤) :

حل المعادلة : $(\frac{١}{٣})^{٢س-١} = ٢٧^{س-١}$

الحـــــــــــل :

$$(\frac{١}{٣})^{٢س-١} = ٢٧^{س-١}$$

$$(٣^{-١})^{٢س-١} = (٣^{٣})^{س-١}$$

$$٣^{-٢س+١} = ٣^{٣س-٣}$$

إذن : $-٢س + ١ = ٣س - ٣$

$$س = ٠,٨$$

مثـال (٧-٢٥) :

ارسم جزءاً من المنحني ص = $٣^{س}$ مستعيناً بصور عناصر المجموعة :

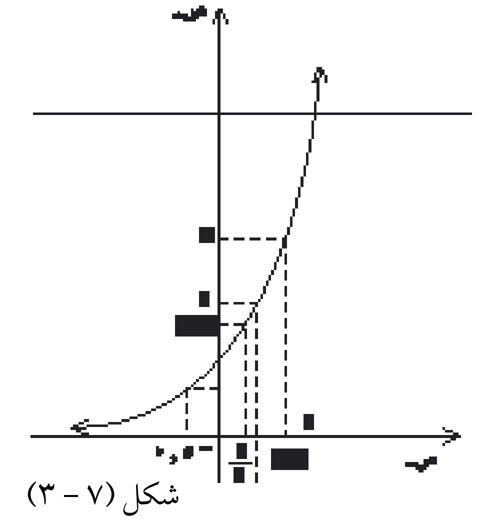
{ ١,٥ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢} ومن الرسم أوجد :

$\sqrt{3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$

استعن بالرسم لحل كلٍّ من المعادلتين : $3^{س} = 3$ ، $3^{س} = 2$

الحـــــــــل :

س	ص = $3^{س}$
-٢	$\frac{1}{9}$
-١	$\frac{1}{3}$
٠	١
١	٣
١,٥	٥,٢ (مقرّبة)



شكل (٧ - ٣)

$\sqrt{3} = 3^{0,5}$ ، ومن المنحني المرسوم في الشكل (٧ - ٣) :

عند س = ٠,٥ نجد ص ≈ ١,٧ أي أن $\sqrt{3} \approx 1,7$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-0,5}$ ومن الشكل (٧ - ٣) ، عند س = -٠,٥ فإن ص ≈ ٠,٦

أي أن : $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,6$

$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \approx 1,7 \times 0,6 = 1,02 \approx 1$ ، وهذا ما يتفق مع القيمة المضبوطة لهذا المقدار، إذ أن : $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 3^{0} = 1$.

المعادلة الأولى $3^{س} = 3$ من الرسم البياني نجد أن ص = ٣ $\Leftarrow$ س ≈ ١

المعادلة الثانية : $3^{س} = 2$ من الرسم البياني نجد أن ص = ٢ $\Leftarrow$ س ≈ ٠,٧

تمارين (٧ ــ ٦)

(١) إذا كان $أ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$ ، $أ^{س_١} = ب^{س_١}$ فأثبت أنه :

إما $أ = ب$ ، أو $س_١ = ٠$

(٢) أثبت أن جميع المنحنيات التي تمثِّل الدالة الأسيَّة د : $س \leftarrow أ^{س}$ ($أ > ٠$)

تمر بنقطة ثابتة هي (٠ ، ١) .

(٣) ما هي العلاقة بين منحنيي الدالتين : $ص = ٣^{-س}$ ، $ص = (\frac{١}{٣})^{س}$ ؟

(٤) ما هي العلاقة بين منحنيي الدالتين : $ص = ٣^{س}$ ، $ص = ٣^{-س}$ ؟

أي العددين من بين الأزواج الآتية أكبر :

(٥) $٣^{\sqrt{٣}}$ أم $٣^{١,٥}$ ؟

(٦) $(\frac{١}{٣})^{\sqrt{٣}}$ أم $(\frac{١}{٣})^{١,٥}$ ؟

(٧) $٥^{-\frac{[illegible]}{٢}}$ أم $٥^{-١,٥}$ ؟

(٨) $٢^{\sqrt{٣}}$ أم $٤^{٠,٧}$ ؟

(٩) $٥^{-[illegible]}$ أم $٢٥^{-١,٥}$ ؟

(١٠) $٢^{\sqrt{١٥}}$ أم $(\frac{١}{٤})^{-٢}$ ؟

حل المعادلات الآتية :

(١١) $٣^{٢س-١} = ٣^{٢}$

(١٢) $٥^{س+٣} = ٥^{١+٣س}$

(١٣) $٢٥^{٢س} = ٥^{س+٩}$

(١٤) $(\frac{١}{٣})^{٢س-٣} = ٣^{٣س-٢}$

(١٥) $(\frac{٩}{٤})^{٢س} = (\frac{٢}{٣})^{-٦س}$

(١٦) $(\frac{١}{٤})^{س+٢} = ٨^{٢س+١} \times ٨^{س-٢}$

(١٧) ارسم بدقَّة جزءاً من المنحني البياني للدالة : $ص = ٢^{س}$

ومن الرسم أوجد كلاًّ من : $٢^{\frac{١}{٤}}$ ، $٢^{-\frac{٥}{٤}}$ ، $٢^{٠,٣}$ ، $٢^{٠,٧}$

ثم أوجد : $٢^{\frac{١}{٤}} \times ٢^{-\frac{٥}{٤}}$ ، $٢^{٠,٣} \times ٢^{٠,٧}$

(أ) بالاعتماد على القيم التي أوجدتها من الرسم .

(ب) بالاعتماد على قاعدة ضرب القوى ذات الأسس الحقيقية .

٧ - ٤ تطبيقات جبرية

أوردنا في الفقرة السابقة أمثلة على حل المعادلات التي من الشكل :

$أ^{س_١} = أ^{س_٢}$ معتمدين على كون الدالة الأسية هي تقابل من ح إلى $ح^+$ ، وسنورد في هذه الفقرة تطبيقات جبرية على (المعادلات الأسية) وهي المعادلات التي يكون الأس فيها محتوياً على المجهول .

مثال (٧-٢٦) :

لحل المعادلة : $٤^{س} - ٩ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$ (١)

لاحظ أن : $٤^{س} = (٢^{٢})^{س} = (٢^{س})^{٢}$

ولو اتخذت $٢^{س}$ مجهولاً ، أي أن : $٢^{س} = ص$

لأصبحت المعادلة : $ص^{٢} - ٩ص + ٨ = ٠$

ما هما جذرا هذه المعادلة؟ لعلَّك وجدتهما : ص = ١ أو ص = ٨ .

ماهي قيم س إذن ؟

ستجد أن : ص = ١ تعني : $٢^{س} = ١ = ٢^{٠}$ أي أن : س = ٠

وأن : ص = ٨ تعني : $٢^{س} = ٨ = ٢^{٣}$ أي أن : س = ٣

تدريب (٧-١) :

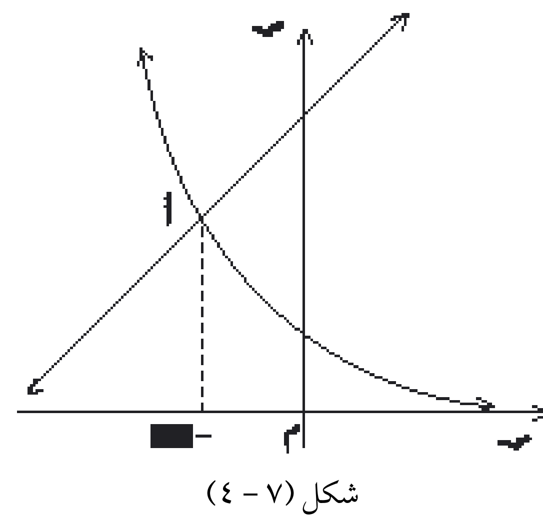
عوّض قيمتي س في المعادلة (١) وتأكد من صحة الإجابتين .

مثـال (٧-٢٧) :

لحل المعادلة : $٢^{-س}$ = س + ٤ (١)

لعلّك تلاحظ أن قيمة س التي تحقق هذه المعادلة هي الإحداثي السيني لنقطة تقاطع المنحني ص = $٢^{-س}$ والمستقيم ص = س + ٤

لقد رسمنا لك في الشكل (٧ كلاًّ من المنحني ص = $٢^{-س}$ والم ص = س + ٤ ، ولو أعدت الـ بنفسك لوجدت أن نقطة التقاطع الموافقة للقيمة : س = − ٤ , ١ .



شكل (٧ − ٤)

أوجد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة $٢^{-(-١,٤)}$ وتحقق من صحة المعادلة (١).

تـمــاريــن (٧ ــ ٧)

في التمارين (١ − ٨) المطلوب حل المعادلات في .

(١) $٣^{س} = \frac{١}{٨١}$

(٢) $٢٧^{س^٢+} = ٣^{س١+}$

(٣) $٣^{٥س} - ٢٤٣ = ٠$

(٤) $٢^{س١+} - ٤^{٣س} = ٠$

(٥) $٢^{س} \times ٢^{س٢-} = ١٦$

(٦) $٢^{٤س} - ١٢ \times ٢^{٢س} + ٣٢ = ٠$

(٧) $٤^{س^٢+س-٢} = ١$

(٨) $(\sqrt{٢})^{س^٢+٧س} = ١$

(٩) هل للمعادلة : $٥^{س^٢+س-٢}$ = ٠ حلّ في ح؟ ولماذا ؟

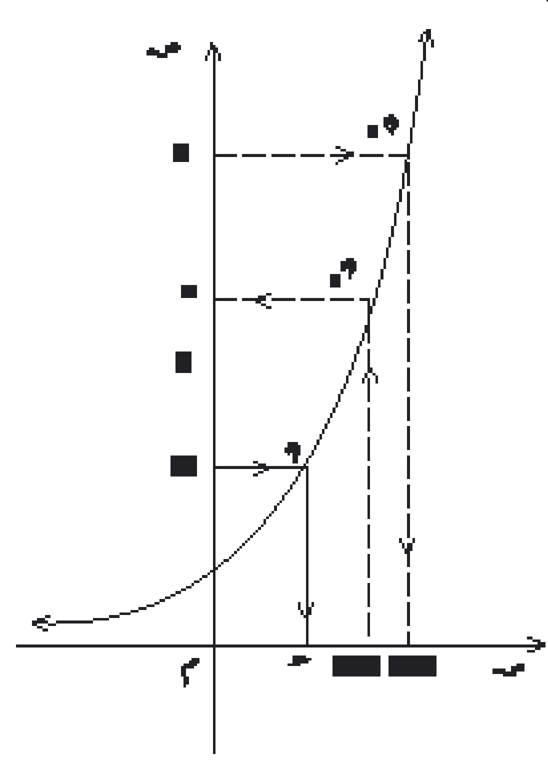
في التمارين (١٠ - ١٣) وبالاستعانة بالرسم البياني، حل المعادلات لأقرب عشر:

(١٠) $٢^{س} = ٤ - ٢س$ (١١) $٢^{-س} = س$

(١٢) $٢^{س} = س + ٢$ (١٣) $٢^{-س} = ٢ - ٢س$

٧ - ٥ تعريف اللوغاريتم - الدالة اللوغاريتمية

(١) رأينا أن الدالة الأسية هي تقابل، وعلى هذا فإنه من أجل أية نقطة هـ (س،ص) من المنحني البياني للدالة ص = $أ^{س}$ ، يمكن إيجاد قيمة وحيدة لِـ ص انطلاقاً من قيمة مفروضة لِـ س وبالعكس.



على سبيل المثال:

في الشكل (٧ - ٥) أعدنا رسم جزءٍ من منحني الدالة الأسيّة ص = $٢^{س}$ (الذي سبق أن رسمناه في الشكل (٧ - ١) - أ ، ب ، هـ).

فلو اعتبرنا $س_{١} = ٢,٣$ سنحصل على قيمة مقربة لِـ $ص_{١} = ٢^{٢,٣} \approx ٥$ (إذ لو رفعنا من النقطة $س_{١} = ٢,٣$ عموداً على المحور س للاقى المنحني في النقطة الوحيدة $هـ_{١}$ ، ومن الشكل نجد أن $ص_{١} \approx ٥$)

شكل (٧ - ٥)

(تحقق باستخدام الآلة الحاسبة أن $٢^{٢,٣} \approx ٥$)

وبالعكس: لو اعتبرنا $ص_{١} = ٧$ ، سنحصل على النقطة الوحيدة

$ـه_٢$ (س$_٢$ ، ٧) ويكـون : ٧ = ٢^{س_٢} ، وواضـح من الشـكل أن س$_٢$ ≈ ٢,٨ ، أن :
٧ ≈ ٢^{٢,٨} (تحقق من ذلك باستخدام الآلة الحاسبة) .

وكما هو واضح في الشكل (٧–٥) ، لو اعتبرنا أي عدد حقيقي موجب ب فإنَّه يقابله عدد حقيقي وحيد ـه ، حيث :

$$ب = ٢^{ـه}$$

الأس ـه نسميه لوغاريتم العدد ب للأساس ٢

ونكتب لو$_٢$ ب = ـه

وعـلـيـه فـإن : لو$_٢$ ٨ = ٣ لأن ٢^٣ = ٨

لو$_٢$ $\frac{١}{٤}$ = −٢ لأن ٢$^{-٢}$ = $\frac{١}{٤}$

لو$_٢$ ٥ ≈ ٢,٣ لأن ٢^{٢,٣} ≈ ٥

لو$_٢$ ٧ ≈ ٢,٨ لأن ٢^{٢,٨} ≈ ٧

تدريب (٧-٢) :

استعن بالشكل (٧ – ٥) وتحقق أن : ٦ ≈ ٢^{٢,٦} ، ٠,٤ ≈ ٢$^{-١,٣}$ ثم استنتج قيمة مقربة لكلٍّ من لو$_٢$ ٦ ، لو$_٢$ ٠,٤ .

من الطبيعي أن تستطيع أن تستبدل بالأساس ٢ أي أساس آخر ، شريطة أن يكون هذا الأساس عدداً حقيقياً موجباً لا يساوي ١ ، لأن جميع قوى العدد ١ هي ١ ، وعليه نستطيع أن نضع تعريف اللوغاريتم :

تعـــريـــــف (٧-٨):

إذا كان: $أ$ ، ب عددين حقيقيين موجبين ($أ \neq ١$) فإن :

$$لو_{أ} ب = هـ \Leftrightarrow ب = أ^{هـ}$$

الرمز ($لو_{أ}$ ب) يقرأ : لوغاريتم ب للأساس $أ$.

نتائج (٧-١) :

١) حيث اعتبرنا الأساس $أ$ موجباً ($أ \neq ١$) والعدد ب موجباً ، فإنه يوجد عدد وحيد هـ بحيث : ب = $أ^{هـ}$ ، وهذا يعني أن $لو_{أ}$ ب له قيمة وحيدة.

٢) يمكن أن نعبِّر عن تعريف اللوغاريتم بقولنا :

إذا كان $أ$ عدداً حقيقياً موجباً ، $أ \neq ١$ فإن :

لوغاريتم العدد الموجب ب للأساس $أ$ هو الأس الذي يجب أن نرفع إليه الأساس $أ$ لنحصل على العدد ب .

٣) بما أن العلاقتين : $لو_{أ}$ ب = هـ وَ ب = $أ^{هـ}$ متكافئتان، فلو عوَّضنا قيمة هـ في أولاهما بالعلاقة الثانية لنتج لدينا : $أ^{لو_{أ} ب}$ = ب

٤) حيث إن : $أ^{٠} = ١$ فإن : $لو_{أ} ١ = ٠$

أي أنَّ لو غاريتم العدد ١ يساوي الصفر مهما كان الأساس .

وحيث إن : $أ = أ^{١}$ فإن : $لو_{أ} أ = ١$

أي أنَّه إذا تساوى العدد والأساس فإن اللوغاريتم يساوي الواحد .

مثال (٧-٢٨) :

اكتب الصيغة اللوغاريتمية المقابلة للصيغة الأسيّة :

(أ) $٣^{٢} = ٩$ (ب) $٥^{-٣} = \frac{١}{١٢٥}$ (ﺟ) $٠,٠٠٠٠١ = ١٠^{-٥}$

الحـــــــل :

اللوغاريتم هو الأس الذي نرفع إليه الأساس لنحصل على العدد ، فيكون :

(أ) $٣^{٢} = ٩ \Leftrightarrow$ لو$_{٣}$ ٩ = ٢

(ب) $٥^{-٣} = \frac{١}{١٢٥} \Leftrightarrow$ لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = −٣

(ﺟ) $٠,٠٠٠٠١ = ١٠^{-٥} \Leftrightarrow$ لو$_{١٠}$ ٠,٠٠٠٠١ = −٥

مثال (٧-٢٩) :

أوجد اللوغاريتمات الآتية :

(أ) لو$_{٢}$ ٦٤ (ب) لو$_{١٠}$ ١٠٠٠٠ (ﺟ) لو$_{٤}$ ٠,٢٥

الحـــــــل :

(أ) بما أنَّ $٦٤ = ٢^{٦}$ فإن : لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦

(ب) بما أنَّ $١٠٠٠٠ = ١٠^{٤}$ فإن : لو$_{١٠}$ ١٠٠٠٠ = ٤

(ﺟ) بما أنَّ $٠,٢٥ = \frac{١}{٤} = ٤^{-١}$ فإن : لو$_{٤}$ ٠,٢٥ = −١

مثال (٧-٣٠) :

حل المعادلات :

(أ) لو$_{٣}$ س = ٤ (ب) لو$_{س}$ ١٠٠٠ = ٣ (ﺟ) لو$_{٥}$ ٦٢٥ = س (د) لو$_{س}$ ٠,٠٠٠١ = −٤

الحـــــــل :

(أ) $لو_{٣}$ س = ٤ ⟺ س = $٣^{٤}$ = ٨١

(ب) $لو_{س}$ ١٠٠٠ = ٣ ⟺ $س^{٣}$ = ١٠٠٠

⟺ $س^{٣}$ = $١٠^{٣}$ فيكون س = ١٠

(هـ) $لو_{٥}$ ٦٢٥ = س ⟺ $٥^{س}$ = ٦٢٥ = $٥^{٤}$ فيكون س = ٤

(د) $لو_{س}$ ٠,٠٠٠١ = −٤ ⟺ $س^{-٤}$ = ٠,٠٠٠١ = $\frac{١}{١٠^{٤}}$

أو : $س^{٤}$ = $١٠^{٤}$

أي أن س = ١٠ أو −١٠

لكن س > ٠ فيكون الحل س = ١٠

(٢) الدالّـة اللّـوغـاريتميّـة :

تعـــريــــف (٧-٩) :

الدَّالّة المعرفة من أجل أي عدد حقيقي س > ٠ بالمعادلة : ص = $لو_{أ}$ س
(أ عدد حقيقي ثابت موجب ، أ ≠ ١) نسمّيها دالّة لوغاريتميّة للأساس أ

واضح أن مجال هذه الدالّة هو $ح^{+}$

نستطيع أن نكتشف العلاقة بين المنحنيين البيانيين :

للدالّة اللوغاريتميّة حيث : ص = $لو_{أ}$ س

والدالّة الأسيّة حيث : ص = $أ^{س}$

بالاعتماد على التعـريف (٧-٨) – حيث سنهتم بالحالـة التي يكـون فيـها

الأساس أ > ١ ـ وسنجد ما يلي :

١) إذا كانت النقطة (جـ ، ب) منتمية إلى المنحني ص = $لو_أ$ س فإن :

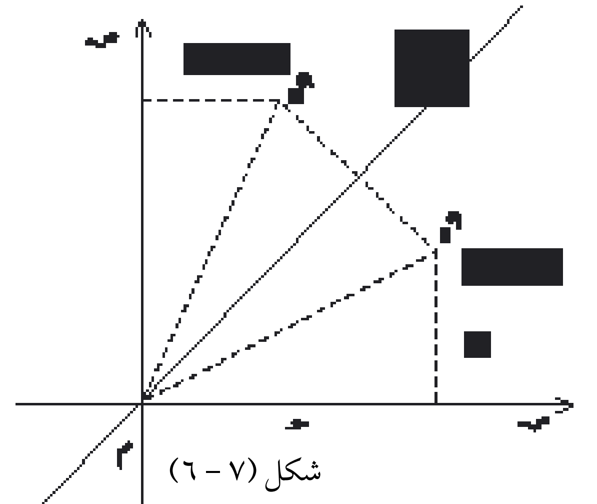
ب = $لو_أ$ جـ وهذه العلاقة تكافىء : جـ = $أ^{ب}$

أي أن النقطة (ب ، جـ) ستنتمي إلى المنحني ص = $أ^{س}$

٢) النقطتان : $هـ_١$(جـ ، ب) ، $هـ_٢$(ب ، جـ) متناظرتان بالنسبة للمستقيم ص = س ، انظر الشكل (٧-٦)

(لاحظ أن المستقيم ص = س هو العمود المنصف للقطعة المد [$هـ_١$ $هـ_٢$])

لعلَّك أدركت من هذا أن المنح البيانيين للدالتين متناظران بالنسبة للمستقيم ص = س



شكل (٧ - ٦)

في الشكل (٧ – ٧) رسمنا منحنيي الدالتين اللوغاريتمية حيث .

ص = $لو_أ$ س والأسية حيث ص = $أ^{س}$ وذلك بفرض أ = ٢

لاحظ أن النقاط التي استعنا بها لرسم المنحني ص = $٢^{س}$ هي نقاط المجموعة :

$م_١$ = {(٢ ،–$٢^{-٢}$) ، (٢ ،–$١^{-١}$) ، (٠ ، $٢^{٠}$) ، (١ ، $٢^{١}$) ، (٢ ، $٢^{٢}$)}

والنقاط التي استعنا بها لرسم المنحني ص = $لو_٢$ س هي نقاط المجموعة :

$م_٢$ = {($٢^{-٢}$ ، ٢) ، (–$٢^{-١}$ ، ٢ ، $٢^{٢}$) ، (٢ ، ١ $٢^{١}$) ، (٠ ، $٢^{٠}$) ، (–١)}

وأن كل نقطة (ب ، ـه) من

المجموعة $ب_1$ حيث ـه =

تقابلها بالتناظر حول المستقيم

ص = س النقطة (ـه ، ب)

المجموعة $ب_2$ حيث ب = لو

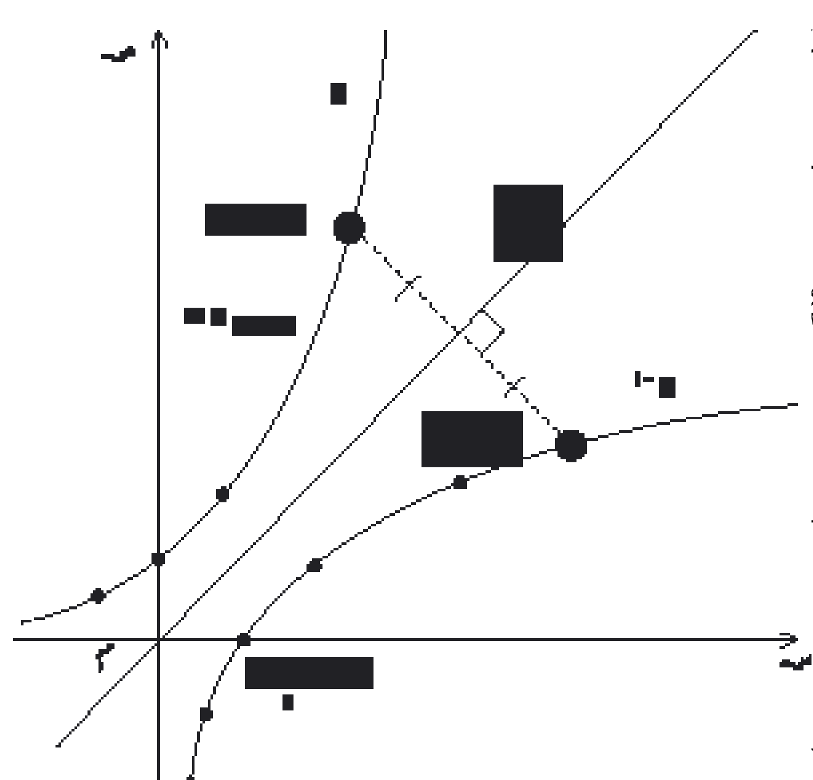
أي أن : التقابل :

تا : ح ← ح+

س ← $٢^{س}$

تقابله العكسي : $تا^{-1}$: ح+ ← ح .

س



شكل (٧ - ٧)

وبطريقة مشابهة نستطيع التوصل إلى أن

تا : ح+ ← ح : س ← لو$_{أ}$ س هي تقابل مما يقودنا إلى ان :

$$لو_{أ}\,س_1 = لو_{أ}\,س_2 \Leftrightarrow س_1 = س_2$$

تدريب (٧-٣) :

علِّل ما يلي : (١) الأعداد التي لها لوغاريتم لأساس أ > ١ هي الأعداد الحقيقية الموجبة.

(٢) الأعداد الحقيقية السالبة ليس لها لوغاريتم .

مثال (٧-٣١) :

أوجد أكبر فترة تصلح مجالاً لكلٍّ من الدالتين الآتيتين ، ثم قارن بين المجالين:

(أ) ص = $\sqrt{\quad}$ (ب) ص = لو$_{٢}$(٣ -س)

الحـــــــــــل :

(أ) العدد السالب ليس له جذر تربيعي حقيقي وعليه فإن :

$٣ - س \geq ٠$ أو : $س \leq ٣$ والفترة المطلوبة ف = (- ∞ ، ٣]

(ب) في حالة لو$_٢$(٣ - س) فإن :

$٣ - س > ٠$ أو : $س < ٣$ والفترة المطلوبة فَ = (- ∞ ، ٣)

واضح أن فَ ⊂ ف وأن ف - فَ = { ٣ } .

مثـال (٧-٣٢) :

حل في ح المعادلة : لو$_٥$(س^٢ - س) = لو$_٥$ ٦ (١)

الحـــــــــــل :

المعادلة (١) ⟸ (س^٢ - س) = ٦ ⟺ س^٢ - س - ٦ = ٠

⟺ (س+٢) (س-٣) = ٠

⟺ (س = -٢ أو س = ٣)

التحقيق :

(١) عندما س = -٢

المعادلة (١) تصبح :

لو$_٥$(-٢)^٢ - (-٢) ≟ لو$_٥$ ٦

أي أن : لو$_٥$(٤+٢) = لو$_٥$ ٦

وهذا محقق

(٢) عندما س = ٣

المعادلة (١) تصبح :

لو$_٥$(٣^٢ - ٢) ≟ لو$_٥$ ٦

أي أن : لو$_٥$(٩ - ٣) = لو$_٥$ ٦

وهذا محقق

والحلّان مقبولان ، أي أن مجموعة الحل : { -٢ ، ٣}

تمارين (٧ ـ ٨)

اكتب العبارات الأسيّة المقابلة للعبارات اللّوغاريتميَّة :

(١) $لو_{٥}\ ١٢٥ = ٣$ (٢) $لو_{٩}\ ٣ = \frac{١}{٢}$ (٣) $لو_{\frac{١}{٢}}\ ٨ = -٣$

اكتب العبارات اللّوغاريتميّة المقابلة للعبارات الأسية :

(٤) $١٠^{٣} = ١٠٠٠$ (٥) $٣^{-٥} = \frac{١}{٢٤٣}$ (٦) $٢٥^{\frac{٣}{٢}} = ١٢٥$

أوجد عددين صحيحين متتاليين يكون اللّوغاريتم المطلوب محصوراً بينهما :

(٧) $لو_{٣}\ ٨$ (٨) $لو_{٢}\ ١٠$ (٩) $لو_{١٠}\ ٠,٠٥$

أوجد قيمة كلٍّ مما يلي :

(١٠) $لو_{٧}\ ٧^{٥}$ (١١) $لو_{٣}\ ٣^{-٢}$ (١٢) $١٠^{لو_{١٠}\ ٤}$

(١٣) إذا كان $أ > ١$ وَ $٠ < ب < ١$ فبيِّن ما إذا كان $لو_{أ}\ ب$ موجباً أو سالباً

(١٤) إذا كان $٠ < أ < ١$ وَ $٠ < ب < ١$ فبيِّن ما إذا كان $لو_{أ}\ ب$ موجباً أو سالباً

أوجد اللّوغاريتمات الآتية :

(١٥) $لو_{٨}\ ٨$ (١٦) $لو_{١٠}\ ٠,٠٠١$ (١٧) $لو_{٩}\ ٢٧$

(١٨) $لو_{٤}\ ٨$ (١٩) $لو_{\sqrt{٥}}\ ٢٥$ (٢٠) $لو_{\sqrt{٢}}\ \frac{١}{٤}$

حل في ح المعادلات الآتية :

(٢١) $لو_{س}\ ٨ = ٣٢$ (٢٢) $لو_{س}\ ٨١ = ٣$ (٢٣) $لو_{٣}\ س = ٣$

(٢٤) $لو_{\sqrt{٥}}\ ١٢٥ = س$ (٢٥) $لو_{١٠}\ (س^{٢}+١) = ١$

في كلٍّ مما يلي ارسم جزأين من المنحنيين البيانيين على المستوي الإحداثي نفسه متخذاً وحدة القياس نفسها :

(٢٦) ص = $٣^{\text{س}}$ ، ص = $\text{لو}_{٣}\,\text{س}$ (٢٧) ص = $١٠^{\text{س}}$ ، ص = $\text{لو}_{١٠}\,\text{س}$

بسِّط كلاًّ مما يلي :

(٢٨) $\text{لو}_{٣}\,٨١ \times \text{لو}_{٨١}\,٣$ (٢٩) $\text{لو}_{٤}\,٨ \times \text{لو}_{٨}\,٤$

(٣٠) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب} \times \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ}$ (ضع $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$ = س ، ثم أوجد بدلالة س : $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ}$)

(٣١) أثبت أن : $\text{لو}_{٧}\,(\text{لو}_{٣}\,(\text{لو}_{٢}\,٨)) = ٠$

(٣٢) أثبت أن : $\text{لو}_{\text{أ}}\,(\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ}) = ٠$

(٣٣) أثبت أن : $\text{لو}_{\text{أ}}\,(\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ}^{\text{أ}}) = ١$ (٣٤) أوجد : $\text{لو}_{٢}\,(\text{لو}_{٢}\,(\text{لو}_{٢}\,١٦))$

(٣٥) أثبت أن : $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب} \times \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{جـ} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{جـ}$ (ضع $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$ = س ، $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{جـ}$ = ص)

٧ - ٦ قوانين اللّوغاريتمات :

سوف ندرس في هذا البند أهم قوانين اللّوغاريتمات، والجدير بالذكر أننا عندما نذكر $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$ مثلاً ، أثناء عرض هذه القوانين ، أو البرهان عليها ، فلابد من أن نكون قد فرضنا ضمناً أن : س $\in \text{ح}^{+}$ ، أ $\in \text{ح}^{+} - \{١\}$ لذا فإننا لن نذكر ذلك توخياً لعدم التكرار .

نظـــريـــــة (٧-٤) :

$$\text{لو}_{\text{أ}}\,(\text{ب} \times \text{جـ}) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{جـ}$$

البرهـــان :

نفرض أن : $لو_أ ب = س$ ، $لو_أ هـ = ص$ $\Leftrightarrow$ $ب = أ^{س}$ ، $هـ = أ^{ص}$ من تعريف اللّوغاريتم

وعليه يكون : $ب \times هـ = أ^{س} \times أ^{ص}$

أو : $ب \times هـ = أ^{س + ص}$ (لماذا ؟)

$لو_أ (ب \times هـ) = س + ص$

أو : $لو_أ (ب \times هـ) = لو_أ ب + لو_أ هـ$

تدريب (٧-٤) :

تحقق أن : $لو_أ (ب \times هـ \times ى) = لو_أ ب + لو_أ هـ + لو_أ ى$

ثم استنتج أن : $لو_أ (ب \times هـ \times ى \times \cdots \times هـ) = لو_أ ب \times لو_أ هـ \times لو_أ ى \times \cdots \times لو_أ هـ$

مثـال (٧-٣٣) :

(١) $لو_٣ (٢٧ \times ٨١) = لو_٣ ٢٧ + لو_٣ ٨١ = ٣ + ٤ = ٧$

(٢) $لو_أ ٨ + لو_أ ١٢٥ + لو_أ ٠,٠٠١ = لو_أ (٨ \times ١٢٥ \times ٠,٠٠١) = لو_أ ١ =$ الصفر

نظـــريـــة (٧-٥) :

$$لو_أ \frac{ب}{هـ} = لو_أ ب - لو_أ هـ$$

البرهـــان :

بفرض: $\frac{\text{ب}}{\text{هـ}} = \text{د}$

يكون : $\text{هـ} \times \text{د} = \text{ب}$ وبحساب اللوغاريتم

نجد : $\text{لو}_{\text{أ}}(\text{هـ} \times \text{د}) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$

أو : $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{هـ} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{د} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$ بتطبيق النظرية (٧-٤)

وبالتالي: $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{د} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{هـ}$

أي أن : $\text{لو}_{\text{أ}}\,\frac{\text{ب}}{\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{هـ}$

مثـال (٧-٣٤) :

إذا علمت أن $\text{لو}_{١٠}\,٥ \approx ٠,٦٩٩٠$ فأوجد $\text{لو}_{١٠}\,٢$

الحـــــل :

$٢ = \frac{١٠}{٥}$ فيكـون $\text{لو}_{١٠}\,٢ = \text{لو}_{١٠}\,١٠ - \text{لو}_{١٠}\,٥$

$\approx ١ - ٠,٦٩٩٠ = ٠,٣٠١٠$

نتيجة (٧ - ٢)

$$\text{لو}_{\text{أ}}\,\frac{١}{\text{ب}} = \text{لو}_{\text{أ}}\,١ - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$$

$$= ٠ - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$$

أي أن : $\text{لو}_{\text{أ}}\,\frac{١}{\text{ب}} = -\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$

مثال (٧-٣٥) :

بالاعتماد على أرقام المثال السابق أوجد $لو_{١٠} \frac{١}{٢}$ ، $لو_{١٠} \frac{١}{٥}$

الحل :

$لو_{١٠} \frac{١}{٢} = -لو_{١٠} ٢ = -٠,٣٠١٠$

$لو_{١٠} \frac{١}{٥} = -لو_{١٠} ٥ = -٠,٦٩٩٠$

نظرية (٧-٦) :

$لو_{أ} س^{ن} = ن لو_{أ} س$ حيث $ن \in ح$

البرهان :

نفرض أن : $لو_{أ} س = ص$

فيكون : $س = أ^{ص}$ من تعريف اللّوغاريتم

$\Leftarrow س^{ن} = (أ^{ص})^{ن}$

$\Leftarrow س^{ن} = أ^{ن ص}$

$\Leftarrow لو_{أ} س^{ن} = ن ص$ من تعريف اللّوغاريتم

$\Leftarrow لو_{أ} س^{ن} = ن لو_{أ} س$

تدريب (٧-٥) :

تحقق من أن : (١) $لو_{أ} \sqrt[ن]{س} = \frac{١}{ن} لو_{أ} س$ (٢) $لو_{أ} \sqrt[ن]{س^{م}} = \frac{م}{ن} لو_{أ} س$

مثال (٧-٣٦) :

إذا علمت أن لو$_{٣}$ ٥ = ١,٤٦٥ وَ لو$_{٣}$ ٢ = ٠,٦٣١ فأوجد :

(أ) لو$_{٣}$ ١٠ (ب) لو$_{٣}$ ١٥ (جـ) لو$_{٣}$ ١٦

(د) لو$_{٣}$ ٢,٥ (هـ) لو$_{٣}$ ٠,٤ (و) لو$_{٣}$ $\sqrt[٣]{٤}$

الحـــل :

(أ) لو$_{٣}$ ١٠ = لو$_{٣}$ ٥ × ٢
= لو$_{٣}$ ٥ + لو$_{٣}$ ٢
= ١,٤٦٥ + ٠,٦٣١
= ٢,٠٩٦

(جـ) لو$_{٣}$ ١٦ = لو$_{٣}$ $٢^{٤}$
= ٤ لو$_{٣}$ ٢
= ٤ × ٠,٦٣١
= ٢,٥٢٤

(هـ) لو$_{٣}$ ٠,٤ = لو$_{٣}$ $\frac{٤}{١٠}$
= لو$_{٣}$ $\frac{٢}{٥}$
= لو$_{٣}$ ٢ − لو$_{٣}$ ٥
= ٠,٦٣١ − ١,٤٦٥
= −٠,٨٣٤

(ب) لو$_{٣}$ ١٥ = لو$_{٣}$ ٥ × ٣
= لو$_{٣}$ ٥ + لو$_{٣}$ ٣
= ١,٤٦٥ + ١
= ٢,٤٦٥

(د) لو$_{٣}$ ٢,٥ = لو$_{٣}$ $\frac{٥}{٢}$
= لو$_{٣}$ ٥ − لو$_{٣}$ ٢
= ١,٤٦٥ − ٠,٦٣١
= ٠,٨٣٤

(و) لو$_{٣}$ $\sqrt[٣]{٤}$ = لو$_{٣}$ $(٢^{٢})^{\frac{١}{٣}}$
= لو$_{٣}$ $٢^{\frac{٢}{٣}}$
= $\frac{٢}{٣}$ لو$_{٣}$ ٢
= $\frac{٢}{٣}$ × ٠,٦٣١
≈ ٠,٤٢١

مثـال (٧-٣٧) :

حل في ح المعادلة : لو$_٤$ س + لو$_٤$ (س−٦) = ٢

الحـــــــل :

لو$_٤$س + لو$_٤$(س−٦) = ٢

لو$_٤$ س(س−٦) = ٢ النظرية (٧−٤)

لو$_٤$ (س^٢ − ٦س) = ٢ نحوّل إلى عبارة أسية.

س^٢ − ٦س = ٤^٢

س^٢ − ٦س − ١٦ = ٠

(س−٨) (س + ٢) = ٠

س = ٨ أو س = −٢

البحث عن الحل المقبول :

(١) إذا كان س = −٢ فإن لو$_٤$س لا وجود له في ح لأن العدد السالب ليس له لوغاريتم وهذا يعني أن −٢ ليس جذراً للمعادلة .

(٢) إذا كان س = ٨ فإن لو$_٤$س + لو$_٤$(س−٦) = لو$_٤$ ٨ + لو$_٤$ ٢

= لو$_٤$ ٨ × ٢ = لو$_٤$ ١٦ = ٢ وهذا يحقق المعادلة .

ومجموعة الحل هي : {٨}

تمارين (٧ ـ ٩)

في كلٍّ من التمارين الآتية ، حوِّل العبارة المعطاة إلى عبارة لا تحوي سوى لوغاريتم لمتغيرٍ أو لعددٍ، علماً بأن جميع المتغيرات الواردة تمثل أعداداً حقيقية موجبة.

مثال $لو_{٢} \frac{٣س^{٢}}{ع}$ **الحل:** $لو_{٢} \frac{٣س^{٢}}{ع} = لو_{٢} ٣س^{٢} - لو_{٢} ع$

$= لو_{٢} ٣ + لو_{٢} س^{٢} - لو_{٢} ع$

$= لو_{٢} ٣ + ٢لو_{٢} س - لو_{٢} ع$

(١) $لو_{٢} \frac{٣}{٤}$ (٢) $لو_{٥} ص^{٢}$ (٣) $لو_{٣} س^{٢} ع^{٢}$ (٤) $لو \frac{٣س}{ع ص}$

(٥) $لو_{٥} \sqrt{س^{٣}}$ (٦) $لو_{٤} ٣ (\frac{ب}{ع})^{٢}$ (٧) $لو_{٢} ٣\sqrt{س}$ (٨) $لو_{٣} (س^{٢} \times ع^{٣})^{٢}$

في كلٍّ مما يلي حدِّد العبارة الصحيحة من الخاطئة وبيِّن السبب :

(٩) $لو_{أ}(س + ع) \neq لو_{أ} س + لو_{أ} ع$ (١٠) $٩^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣} \Leftrightarrow لو_{٩} (-\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٣}$

(١١) $لو_{أ}(س - ع) = لو_{أ} س - لو_{أ} ع$ (١٢) $لو_{٢} (-٤) = -٢$

(١٣) $لو_{٢}(٤ + ٨) = لو_{٢} ١٢$ (١٤) $لو_{٢} (٤ + ٨) = ٥$

(١٥) $لو_{٢} (٤ \times ٨) = ٥$ (١٦) $\frac{لو_{٢} ٣}{لو_{٢} ٥} = لو_{٢} ٣ - لو_{٢} ٥$

في كلٍّ من التمارين التالية اكتب العبارة المعطاة على شكل لوغاريتم لمقدار واحد فقط ، علماً بأن جميع المتغيِّرات الواردة تمثل أعداداً حقيقية موجبة :

مثـال : لو$_{أ}$ س + ٢ لو$_{أ}$ ص − $\frac{١}{٢}$ لو$_{أ}$ ع = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص^{٢} − لو$_{أ}$ $\sqrt{\text{ع}}$

= لو$_{أ}$ س ص^{٢} − لو$_{أ}$ $\sqrt{\text{ع}}$

= لو$_{أ}$ $\frac{\text{س ص}^{٢}}{\sqrt{\text{ع}}}$

(١٧) ٢ لو$_{١٠}$ س + ٥ لو$_{١٠}$ ع

(١٨) ٣ لو$_{٣}$ ٢ س − لو$_{٣}$ ص

(١٩) لو$_{أ}$ ص^{٢} − لو$_{أ}$ س ص + لو$_{أ}$ س^{٢}

(٢٠) ١ − لو$_{٣}$ ب

(٢١) $\frac{١}{٢}$ لو$_{أ}$ $\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{هـ}^{٢}}$ − لو$_{أ}$ ب

(٢٢) ٢ + لو$_{٢}$ هـ

أوجد قيمة س فيما يلي :

(٢٣) لو$_{٢}$ س = ٢ لو$_{٢}$ ٣

(٢٤) لو$_{٥}$ س = لو$_{٥}$ ٣ + لو$_{٥}$ ٢

(٢٥) لو$_{١٠}$ س = $\frac{٣}{٢}$ لو$_{١٠}$ ١٦

(٢٦) س = ٢ لو$_{٢}$ ٦ − لو$_{٢}$ ٤

إذا علمت أن لو$_{١٠}$ ٥ = ٠,٦٩٩ وَلو$_{١٠}$ ٣ = ٠,٤٧٧ فأوجد :

(٢٧) لو$_{١٠}$ ١٥ (٢٨) لو$_{١٠}$ ١٢٥ (٢٩) لو$_{١٠}$ ٠,٦ (٣٠) لو$_{١٠}$ ٩

أثبت صحة ما يلي :

(٣١) لو$_{١٠}$ $\frac{٧٢}{٣٤}$ + لو$_{١٠}$ $\frac{١٧٠}{٧}$ − لو$_{١٠}$ $\frac{١٨}{٣٥}$ = ٢

(٣٢) ٣ (لو$_{١٠}$ ٢ + لو$_{١٠}$ ٠,٠٦) = ٣ لو$_{١٠}$ ٥ − لو$_{١٠}$ ٢١٦ = −٣

(٣٣) $\dfrac{\text{٤لو}_{ب}\text{٣} - \text{لو}_{ب}\text{٤}}{\text{٣لو}_{ب}\text{٩} - \text{لو}_{ب}\text{٨}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}$

حل في ح كلاًّ من المعادلتين :

(٣٤) لو$_{١٠}$(٣س ٧−) + لو$_{١٠}$(٣س + ١) = ١ + لو$_{١٠}$٢

(٣٥) لو$_{٢}$(س٣+) + لو$_{٢}$(س − ٣) = ٤

٧ ـ ٧ اللّوغاريتمات العشريَّة :

(١) تسمى اللّوغاريتمات التي أساسها (١٠) اللّوغاريتمات العشريَّة أو اللّوغاريتمات المعتادة .

وتستعمل اللّوغاريتمات العشريّة عادة في إجراء الحسابات المعقَّدة ، وقد اصطلح على عدم كتابة الأساس ١٠ ، فنكتب مثلاً : لو٣٥ ونعني بذلك لو$_{١٠}$٣٥ وكذلك فإن لو ١٢,١٥ تعني لو$_{١٠}$ ١٢,١٥ وهكذا ...

الجدول الآتي يبين لنا اللّوغاريتمات العشرّية لبعض القوى الصحيحة للعدد ١٠ ، وقد أنشأناه معتمدين على كون : لو ١٠^{ن} = ن (لماذا؟)

مثلاً : لو ١٠٠٠ = ٣ لأن ١٠٠٠ = ١٠^{٣}

لو ٠,٠٠١ = −٣ لأن ٠,٠٠١ = $\dfrac{\text{١}}{\text{١٠٠٠}}$ = ١٠$^{-٣}$

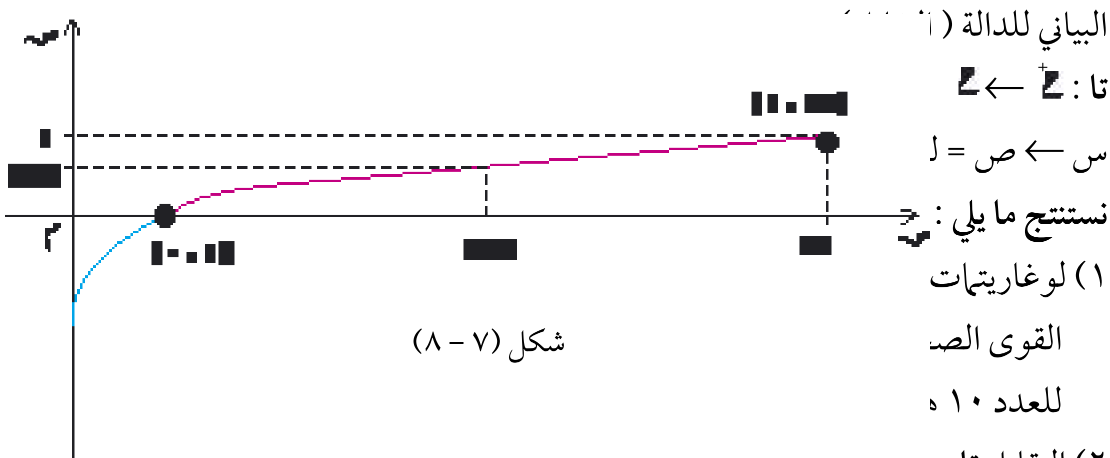
	٠ < س < ١				١ ≤ س ≤ ١٠		س > ١٠		
العدد س	٠,٠٠٠١	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠
الصيغة الأسية للعدد س	١٠$^{-٤}$	١٠$^{-٣}$	١٠$^{-٢}$	١٠$^{-١}$	١٠^{٠}	١٠^{١}	١٠^{٢}	١٠^{٣}	١٠^{٤}
لو س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
	اللوغاريتمات العشرية سالبة				٠ ≤ لوس ≤ ١		لوس > ١		

بالرجوع إلى هذا الجدول وإلى الشكل (٧ – ٨) الذي يمثل جزءاً من المنحني

البياني للدالة (...

تا : ... ← ...

س ← ص = لـ ...



شكل (٧ – ٨)

نستنتج ما يلي :

١) لوغاريتمات

القوى الصـ ...

للعدد ١٠ هـ ...

٢) التقابل **تا** هو ...

(مثلاً : عندما تتزايد س من ١ إلى ١٠ تتزايد ص = لوس من ٠ إلى ١).

٣) نلاحظ ما يلي :

أ) عندما س ≥ ٠ فإن س ليس له لوغاريتم، ونعبِّر عن ذلك بقولنا :

عندما س ∋ (–∞ ، ٠] يكون لو س غير معرَّف.

ب) عندما ٠ > س > ١ (أي س ∋ (٠ ، ١)) فإن لو س يكون عدداً سالباً

(لاحظ الجزء الأزرق من المنحني).

جـ) س = ١ ⟺ لوس = ٠

د) عندما س > ١ فإن لوس > ٠

(٢) العدد البياني والجزء العشريّ من لوغاريتم عدد :

بالرجوع إلى الشكل (٧ – ٨) نلاحظ أنه :

عندما س ∋ (١ ، ١٠) فإن لو س ∋ (٠ ، ١)

وإن أي عدد موجب س ، إذا لم يكن مساوياً إحدى قوى العشرة، فإنه يكتب

بالشكل : س = ب × ١٠^{ن} حيث ١ > ب > ١٠، ن عدد صحيح

وعليه فإن لوس = لو(ب × ١٠^ن) = لو ب + ن (لماذا ؟)

لعلَّك تلاحظ معنا أن لوس يتألف من جزأين :

لوب وهو جزء عشري موجب .

ن وهو عدد صحيح نسميه العدد البياني .

مثـال (٧-٣٨) :

أ) حاول أن تبحث عن : لو٥٥٠

ستجد أن : ٥٥٠ = ٥,٥ × ١٠^٢

وعليه : لو٥٥٠ = لو ٥,٥ + ٢

تستطيع الحصول على قيمة مقرَّبة للعدد (لو٥,٥) من الشكل (٧ – ٨) ستجد

أن لو٥,٥ ≈ ٠,٧

فيكون : لو٥٥٠ = ٠,٧ + ٢ = ٢,٧

ب) حاول إيجاد قيمة مقرَّبة لكلٍّ من : لو٥٥٠٠٠ ، لو٠,٠٠٥٥

ستجد أن : ٥٥٠٠٠ = ٥,٥ × ١٠^٤

فيكون : لو٥٥٠٠٠ = لو ٥,٥ + ٤

≈ ٠,٧ + ٤

= ٤,٧

وأن : ٠,٠٠٥٥ = ٥,٥ × ١٠^-٣

فيكون : لو ٠,٠٠٥٥ = لو٥,٥ – ٣

≈ ٠,٧ – ٣

ونصطلح على كتابته : $\overline{٣}$,٧

وبصورة عامة :

إذا كان س = ب × ١٠^ن ن ∈ ص ، ١ > ب > ١٠

فإن لوس = لوب + ن

لوب: جزء عشريّ موجب

ن: عدد صحيح (العدد البياني)

(٣) طريقة إيجاد لوغاريتم عدد (وبالعكس) :

أ) كيف توجد العدد البياني من لوغاريتم عدد س > ٠ ؟

حيث إنَّ العدد البياني ن عدد صحيح ، لذا نميِّز حالتين :

أولاً : س ≥ ١ وهذا يعني أن العدد البياني ن ≥ ٠

من خلال الأمثلة الآتية نجد :

عندما س = ٥٣٢,٧ = ٥,٣٢٧ × ١٠^٢ فإن العدد البياني من لو س هو ٢.

وعندما س = ٥,٥ = ٥,٥×١٠^٠ فإن العدد البياني من لو س هو ٠

وعندما س = ٧٥٠٠٠ = ٧,٥ × ١٠^٤ فإن العدد البياني من لو س هو ٤

قارن في كل حالة بين العدد البياني وعدد أرقام القسم الصحيح من س لعلَّك أدركت القاعدة الآتية :

> إذا كان العدد س ≥ ١ فإن العدد البياني من (لوس) هو عدد صحيح غير سالب ينقص واحداً عن عدد أرقام القسم الصحيح من س

تدريب (٦-١) :

تحقَّق من أنَّ :

العدد البياني من لو ٧٤٥٠٠٠ هو ٥

والعدد البياني من لو ٧,٤٥ هو ٠

والعدد البياني من لو ٧٤,٥ هو ١

وبالعكس :

> إذا كان العدد البياني من لوس مساوياً (ن عدد صحيح غير سالب) فإنَّ عدد أرقام القسم الصحيح من س يزيد واحداً على العدد البياني أي أنَّه يساوي (ن + ١)

مثلاً : إذا كان لوس = ٢ + جزء عشري موجب

فإنَّ عدد أرقام القسم الصحيح من س = ٢ + ١ = ٣

مثــال (٧-٣٩) :

إذا علمت أنَّ لوس = ٢,٩٢٧٩ فإنَّ : س = $١٠^{٢,٩٢٧٩}$ التعريف (٧ – ٨).

أو : س = $١٠^{٠,٩٢٧٩} \times ١٠^{٢}$

وباستخدام الآلة الحاسبة التي تحتوي على الرمز (X^Y) ستجد أنَّ :

س ≈ ٨,٤٧٠٣ × $١٠^{٢}$ ← العدد البياني (اكتفينا بخمسة أرقام معنوية) .

= ٨٤٧,٠٣

(لاحظ أنَّ عدد المنازل الصحيحة = ٢ + ١ أي : العدد البياني + ١)

ثانياً : ٠ < س < ١ وهذا يعني أن العدد البياني ن < ٠

من خلال الأمثلة الآتية نجد :

عندما س = ٠,٦٧٥ = ٦,٧٥ × $١٠^{-١}$ فإن العدد البياني من لو س هو ١-

وعندما س = ٠,٠٠٠٦٧٥ = ٦,٧٥ × $١٠^{-٤}$ فإن العدد البياني من لو س هو ٤-

وعندما س = ٠,٠٦٧٥ = ٦,٧٥ × $١٠^{-٢}$ فإن العدد البياني من لو س هو ٢-

قارن في كل حالة بين العدد البياني وعدد الأصفار الموجودة بين الفاصلة وأول رقم معنوي من س (من جهة اليسار) .

لعلَّك أدركت القاعدة الآتية :

> إذا كان العدد الموجب س < ١ فإن العدد البياني من (لوس) هو عدد صحيح سالب، تزيد قيمته المطلقة واحداً على عدد الأصفار الواقعة عن يمين الفاصلة العشرية وقبل الوصول إلى أول رقم معنوي .

تدريب (٧-٧) :

تحقق من أن :

العدد البياني من لو ٠,٧٤٥ هو ١-

والعدد البياني من لو ٠,٠٠٧٤٥ هو ٣-

والعدد البياني من لو ٠,٠٠٠٠٠٠٧٤٥ هو ٧-

وبالعكس :

> إذا كان (لو س) يتألف من عدد بياني سالب وجزء عشريّ موجب فإن ٠ < س < ١ ، ويكون س محتوياً على أصفار تقع عن يمين الفاصلة ينقص عددها واحداً عن القيمة المطلقة للعدد البياني السالب.

أي أنه :

إذا كان : لو س = − ن + جزء عشريّ موجب (حيث ن عدد صحيح موجب)

وتكتب : لو س = $\overline{ن}$ + جزء عشريّ موجب

فإن عدد الأصفار عن يمين الفاصلة في العدد س هو ن − ١

مثـال (٧-٤٠) :

إذا علمت أن : لو س = $\overline{٢}$,٩٢٧٩ = (٠,٩٢٧٩ − ٢)

فإن : س = $١٠^{(٠,٩٢٧٩ - ٢)}$ (التعريف (٧ − ٨) .

= $١٠^{٠,٩٢٧٩} \times ١٠^{-٢}$

وبالاستفادة من المثال (٧ − ٣٩) نجد أن :

س = $٨,٤٧٠٣ \times ١٠^{-٢}$ ← العدد البياني

= ٠,٠٨٤٧٠٣

(صفر واحد)

أي أن : عدد الأصفار = القيمة المطلقة للعدد البياني ١−

ب) كيف توجد الجزء العشريّ من لوغاريتم عدد س > ٠ ؟

يستخرج الجزء العشريّ من جداول نظَّمها الرياضيون تسمى : (الجداول اللوغاريتميّة) ، والجدير بالذكر أن القيم التي نحصل عليها هي قيم مقرَّبة وليست كلُّها مضبوطة، ومن هنا نجد نماذج عدة لهذه الجداول، وذلك تبعاً لدرجة التقريب التي روعيتْ فيها .

هناك جداول تعطي الجزء العشريّ مقرَّباً إلى أربعة أرقام عشرّية، وهي التي نستعملها عادة في المدارس الثانوية، وهناك جداول مقرَّبة إلى ثلاثة أرقام عشرّية أو خمسة أو ستة ..

ولعلَّك لاحظت أن الرسم البياني في الشكل (٧ – ٨) يعطيك قيمة لوس مقرَّبة إلى رقم عشري واحد .

ولكل جدول طريقة لاستعماله تكون موجودة في مقدمة ذلك الجدول، ولذا فسوف نترك للطالب فرصة الرجوع إلى الجدول الذي سيستعمله ليتعرَّف على طريقة استعماله سواء لإيجاد لوغاريتم عدد معلوم أو لإيجاد العدد ، إذا عُلِمَ لوغاريتم ذلك العدد .

الآلة الحاسبة :

بالوقت ذاته، فإن بإمكاننا الاستغناء عن هذا الجداول واستخدام الآلة الحاسبة، وهذا ما فعلناه في المثالين (٧ – ٣٩) ، (٧ – ٤٠) حيث أوجدنا س من معرفة (لو س) ، ولو طلب منا إيجاد لوغاريتم عدد معلوم، فإن الآلة الحاسبة التي تحتوي على زر [Log] ستساعد على حساب ذلك .

ولعلَّ الآلة الحاسبة بمقاساتها المختلفة وأشكالها المتطوِّرة هي من أهم سمات هذا العصر الذي فَتحَ الله فيه على العقل البشري، فوصل إلى ما وصل إليه من علم وتقانه ، مصداقاً لقوله تعالى: ﴿ سَنُرِيهِمْ آيَاتِنَا فِي الْآفَاقِ وَفِي أَنفُسِهِمْ ﴾ (سورة فصلت ٥٣) .

تُرى ما هو شكل الآلة التي سيوفِّق الله تعالى هذا الإنسان، المُسْتَخلَفَ في هذه الأرض على صناعتها؟ مما سيجعل، والله أعلم، آلاتنا الحالية المتطوِّرة، مَثَلُها كمثَلِ الجداول الرياضية التي في طريقها إلى الزوال وسبحانه جَلَّ مِنْ قائِل: ﴿وَيَخْلُقُ مَا لَا تَعْلَمُونَ﴾ (سورة النحل ٨).

أما عن طريقة استعمال الآلة الحاسبة، فلكل آلة طريقتها ، المنسجمة مع طريقة ابتكارها، ويرافق كلَّ آلة دليلها الذي يرشدك على طريقة الاستعمال. والآلة الحاسبة بدورها، تختلف كفاءتها من حيث درجة التقريب، تبعاً للأغراض التي صُمِّمت من أجلها .

والذي يزيد الآلة الحاسبة أهمية أنها تعطيك لوغاريتم العدد بكامله، بما في ذلك عدده البياني وقسمه العشري، هذا يجعلها متميِّزة عن الجداول التي لا تُعطيك إلاّ الجزء العشري من اللّوغاريتم ، وعليك أن تبحث عن العدد البياني باتباع ما قدمناه آنفاً.

وكذلك الحال، إذا عُلِمَ اللّوغاريتم وطُلِبَ منك إيجاد العدد الذي يقابلُه، فإنَّ الآلة تعطيك العدد بما في ذلك الفاصلة العشرية التي ستقدِّمها لك في مكانها، في حين أن الجداول تُعطيك العدد بأرقامه المعنوية، وعليك أنت أن تحدد مكان الفاصلة العشرية متبعاً القواعد التي تعلَّمتَها.

والآلة الحاسبة بالإضافة إلى سرعة أدائها ، تعطيك النتائج بثمانية أرقام معنوية على الأقل مما يجعلها متميِّزة على الجداول .

مثــال (٧-٤١) :

أ) أوجد لوغاريتم كلٍّ من : ٤,٥٢١، ٣,٤٢٥٦، ٠,٠٠٦٥

(١) باستخدام جداول ذات أربعة أرقام عشرية.

(٢) باستخدام الآلة الحاسبة مقرِّباً الجواب إلى أربعة أرقام عشريَّة .

ب) استنتج بدون استخدم الجداول أو الآلة الحاسبة كلاًّ مما يلي :

(١) لو ٥٢١٤ ، لو ٥٢١٤٠٠ ، لو٠,٠٠٥٢١٤

(٢) لو ٣٤,٢٥، لو ٠,٣٤٢٥ لو ٣٤٢,٥

(٣) لو ٠,٠٦٥ ، لو ٦,٥، لو ٦٥٠٠٠٠

الحـــــــــل :

(١) باستخدام الجداول :

لو ٥٢١,٤

العدد البياني = ٢

والجزء العشريّ نوجده من الجدول

فيكون : لو ٥٢١,٤ ≈ ٢,٧١٧٢

(٢) باستخدام الآلة الحاسبة :

نُدخل العدد في الآلة ، ثم نضغط

على الزر Log فنجد على

الشاشة 2.7171 71 وبالتقريب

المطلوب يكون:

لو ٥٢١,٤ ≈ ٢,٧١٧٢

لو ٣,٤٢٥٦

الجدول الذي بين أيدينا طاقته

أربعة أرقام معنوية، لذا نقرِّب العدد

إلى أربعة أرقام معنوية فنجد :

٣,٤٢٥٦ ≈ ٣,٤٢٦

العدد البياني = ٠ ، وبعد مطالعة

الجدول نجد :

لو ٣,٤٢٥٦ ≈ لو ٣,٤٢٦

≈ ٠,٥٣٤٨

نُدخل العدد بأرقامه الخمسة

في الآلة ثم نضغط على الزر

Log فنجد :

0.5347 366

وبالتقريب المطلوب يكون :

لو ٣,٤٢٥٦ ≈ ٠,٥٣٤٧

(لاحظ أن سبب الاختلاف في الرقم

الأخير هو التقريب مرَّتين في الجدول)

لو ٠,٠٠٦٥

العدد البياني = ٣-

وبعد مطالعة الجدول نجد :

لو ٠,٠٠٦٥ ≈ $\overline{٣}$,٨١٢٩

نُدخل العدد في الآلة ونضغط

على Log لنجد :

866 | -2.1870 |

فيكون لو ٠,٠٠٦٥ = - ٢,١٨٧١

هل يوجد تناقض بين إجابتي الجدول والآلة في العدد الأخير ؟

إن الإجابة في الآلة هي : لو ٠,٠٠٦٥ ≈ ٢,١٨٧١-

= - ٠,١٨٧١ -٢

وبإضافة + ١ - ١ نجد : = ١-٠,١٨٧١-٢-١

= ٠,٨١٢٩ -٣

= $\overline{٣}$,٨١٢٩ وهي الإجابة نفسها التي حصلت عليها من الجدول

ملحوظة (٧ - ٩) :

لاحظ أن بإمكانك الحصول على الجزء العشري الموجب باستخدام الآلة ، وكتابة العدد البياني بالاعتماد على معلوماتك وذلك

بأن تكتب : ٠,٠٠٦٥ = ٦,٥ × ١٠^-٣^

فيكون : لو ٠,٠٠٦٥ = لو ٦,٥ - ٣

والآلة تعطيك لو ٦,٥ = ٠,٨١٢٩١٣٤ ≈ ٠,٨١٢٩

وبالتالي : لو ٠,٠٠٦٥ ≈ $\overline{٣}$,٨١٢٩

ب)

لقد حسبنا لو ٥٢١,٤

٥٢١٤ = ٥٢١,٤ × ١٠ ⟸ لو ٥٢١٤ = لو ٥٢١,٤ + ١ = ٣,٧١٧٢

وكذلك : ٥٢١٤٠٠ = ٥٢١,٤ × ١٠^٣^

⟸ لو ٥٢١٤٠٠ = لو ٥٢١,٤ + ٣ = ٥,٧١٧٢

وأيضاً : $٠,٠٠٥٢١٤ = ٥٢١,٤ \times ١٠^{-٥}$

$\Leftarrow$ لو ٠,٠٠٥٢١٤ = لو ٥٢١,٤ − ٥ = $\overline{٣},٧١٧٢$

ونترك للطالب حل الفقرتين (٢) ، (٣) .

مثـال (٧-٤٢) :

أوجد س إذا علمت (لو س) في كلٍّ مما يلي :

(١)باستخدام الجداول (٢) باستخدام الآلة الحاسبة

لو س = ٢,٣٧٤٦ ، لو س = ٠,٥٦٢٤٣ ، لو س = $\overline{٣},٥٦٤٧$

الحـــــــــل :

(١) من الجداول

لو س = ٢,٣٧٤٦

نبحث في جداول الأعداد المقابلة للّوغاريتمات المعتادة ونغض النظر عن العدد البياني لأن مهمَّته تِبيان عدد أرقام القسم الصحيح في العدد المطلوب، وموضع الفاصلة العشرية إن وجدت.

العدد البياني في هذا المثال هو ٢ يدلُّ على أن القسم الصحيح من العدد الناتج يتألف من ثلاثة أرقام .

نبحث في الجدول عن مقابل ٠,٣٧٤٦ فنجد ٢٣٦٩

وعليه يكون س = ٢٣٦,٩

طريقة (١)

ندخل اللوغاريتم : ٢,٣٧٤٦ في الآلة ثم نضغط على الزر INV ثم على Log يظهر على الشاشة :

236.91906 فـإذا أردنـا الاكـتـفاء بأربـعـة أرقـام معـنـويـة نـجـد أن س = ٢٣٦,٩

طريقة (٢)

نعتمد على أن لو س = ٢,٣٧٤٦

$\Leftrightarrow$ س = $١٠^{٢,٣٧٤٦}$

وبـاستخدام الزر (X^Y) كما في المثال (٧ − ١٨) نجـد العـدد نفسه (تحقَّق من ذلك).

لو س = ٠,٥٦٢٤٣

العدد البياني = ٠ فالقسم الصحيح يتألف من رقم واحد (٠ + ١ = ١).
وحيث إنَّ الجدول مقرَّبة أعداده إلى أربعة أرقام فإن : ٠,٥٦٢٤٣ ≈ ٠,٥٦٢٤
نبحث في الجدول عن مقابل ٠,٥٦٢٤
فنجد : ٠,٣٦٥١ وعليه يكون :
س = ٣,٦٥١

ستتبع الطريقة الأولى فنجد أن:
س = ٣,٦٥١١٥٢٧
≈ ٣,٦٥١ (تحقق من العدد نفسه باتباع الطريقة الثانية).

لو س = $\overline{٣}$,٥٦٤٧

العدد البياني ٣- يدل على وجود صفرين بين الفاصلة العشرية وأول رقم معنوي
القسم العشري ٠,٥٦٤٧ يقابله في جدول الأعداد المقابلة للّوغاريتمات ٣٦٧٠ وعليه يكون :
س = ٠,٠٠٣٦٧٠

ستتَّبع الطريقة الأولى فندخل في الآلة : ٣- + ٠,٥٦٤٧
ثم نضغط على INV ثم Log
لنجد : 3.6702868-0.3
وهذا يعني أنَّ :
س = ٠,٠٠٣٦٧٠٢٨٦٨
أو : س ≈ ٠,٠٠٣٦٧٠

مثـال (٧-٤٣) :

استفد من نتائج المثال (٧ – ٤٢) لإيجاد الأعداد التي علمت لوغاريتماتها فيما يلي، دون استخدام الآلة الحاسبة أو الجداول :

لوس = $\overline{٢}$,٣٧٤٦ ، لو س = ١,٥٦٢٤٣ ، لوس = ٦,٥٦٤٧

الحـــل :

رأينا في المثال (٧–٤٢) أن مقابل ٠,٣٧٤٦ هو : ٢٣٦٩ وعليه يكون :

لو س = $\overline{٢}$,٣٧٤٦ ⟸⟹ س = ٠,٠٢٣٦٩

وكذلك ستجد أن :

لو س = ١,٥٦٢٤٣ ⟺ س = ٣٦,٥١

لو س = ٦,٥٦٤٧ ⟺ س = ٣٦٧٠٠٠٠

ولو استعملنا العدد الناتج من الآلة لقلنا إن س = ٣٦٧٠٢٨٦,٨

فلو اكتفينا بأربعة أرقام معنوية لوجدنا س = ٣٦٧٠ × ١٠^{٣} = ٣٦٧٠٠٠٠

تمارين (٧ ــ ١٠)

في كلٍّ مما يلي حدِّد العبارة الصحيحة والخاطئة وبيِّن السبب :

(١) لو$_{١٠}$ س = لو س (٢) $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$ = لو أ − لو ب

(٣) إن مجال الدالة د(س) = لو س هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة .

(٤) لو (٤,٥٧٦ − ٢) = لو ٤,٥٧٦ − ٠,٠

(٥) −٤,٤١٦٠ = −٠,٥٨٤٠ = $\overline{٣}$,٥٨٤٠

(٦) −٢ ٠,٤٦٨٢ = −٢,٤٦٨٢ (٧) لو ٥,٢٨ + ٢ = لو ٧,٢٨

(٨) لو ٥,٥ = ٤,٧٤٠٤

(٩) ١٠$^{\overline{٢},٥٧}$ = س ⟺ لو س = $\overline{٢}$,٥٧

(١٠) لو ٦٣٠ = ٢,٧٩٩٣ ⟺ لو ٠,٦٣٠ = $\overline{١}$,٧٩٩٣

أوجد اللّوغاريتمات العشرية للأعداد الآتية :

(١١) ٥,٠٣٢ (١٢) ١,٦٤١ (١٣) ٥٧٠٠٠٠٠ (١٤) ٠,٠٠٠٣

(١٥) ٠,٠٢٤٥ (١٦) ٠,٠٠٣٤١٦ (١٧) ٣٢,٧٥٤٦ (١٨) ٠,٦٨٩١٨٢

أوجد الأعداد المقابلة للّوغاريتمات الآتية :

(١٩) ٢,٦٤٨٢ (٢٠) $\overline{٢}$,٦٤٨٢ (٢١) ٧,٦٤٨٢

(٢٢) ٠,٠٠٥٧٦ (٢٣) $\overline{١}$,٠٠٠٦ (٢٤) ١,٠٠٠٦

أوجد كلاًّ مما يلي :

(٢٥) $١٠^{٢,٥٧}$ (٢٦) $١٠^{\overline{١},٦٣٠٠}$ (٢٧) $١٠^{\overline{٣},٢٢٨٢}$

إذا كان لو ٤,٥٦٦ ≈ ٠,٦٥٩٥٤ فأوجد بدون استخدام الجدول أو الآلة:

(٢٨) لو ٤٥٦٦٠ (٢٩) لو ٤٥,٦٦ (٣٠) لو ٠,٠٠٠٤٥٦٦

(٣١) أوجد لو $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢}$ علماً بأن أ = ٣,٤٥٧ ، ب = ٠,٠٠٢٦١

(٣٢) إذا كان لو أ = ١,٦٤٣٢ ، لو ب = ٤,٦٤٣٢ فأوجد قيمة أ بدلالة ب

٧ - ٨ الاستفادة من اللّوغاريتمات في إجراء الحسابات :

يُستفاد من اللّوغاريتمات في تبسيط العمليات الحسابية، خاصة المعقَّدة منها والتي لا يمكن إجراؤُها ، أو أن إجراءَها يستغرق وقتاً كبيراً، على أن اكتشاف الآلات الحاسبة المتطورِّة يفتح الطريق لإنجاز هذه العمليات بوقت قصير وبدقَّة أكثر وطريق أيسر .

تتلخَّص الفكرة في استخدام الجمع والطرح مكان الضرب والقسمة، في حل المسائل التي تحتوي على أعداد كبيرة ، تلك الفكرة التي لمعتْ أول ما لمعت في الفكر العربي في العصر الذهبي لحضارتنا الإسلامية، ففي نحو سنة ٢١٠هـ ألف سنان ابن الفتح الحرَّاني كتابه الجمع والتفريق شرح فيه الطريقة التي نستطيع أن نحل بها المسائل القائمة على الضرب والقسمة بالجمع والطرح، ثم استطاع بعده ابن يونس المصري المتوفى عام ٣٩٩هـ أن يوجِدَ ما يسمَّى بقانون التحويل :حتا أ × حتا ب = $\frac{١}{٢}$ حتا (أ + ب) + $\frac{١}{٢}$ حتا (أ − ب) وهو كما تشاهد خطوة متقدِّمة إلى الأمام

للانتقال من الضرب إلى الجمع، وتابع الرياضيون المسلمون التقدُّم في هذا الموضوع حتى استطاع ابن حمزة المغربي في القرن العاشر الهجري من اكتشاف الصلة بين المتتابعتين :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، . . . (١)

٢ = $٢^{١}$ ، ٤ = $٢^{٢}$ ، ٨ = $٢^{٣}$ ، ١٦ = $٢^{٤}$ ، ٣٢ = $٢^{٥}$ ، . . . (٢)

(لاحظ العلاقة بين الأسس في السطر الثاني والأعداد في السطر الأول) .

وهكذا وضع المغربي أصول الأُسَيْس (اللّوغاريتم) ومهَّد لاختراعه فمثَلُه كَمَثَل من صنع مصباحاً وهيأه للاشتعال ، فما كان من (جون نابيرَ) الاسكتلندي الذي عاش في الفترة (١٥٥٠ - ١٦١٧م) ـ القرن الحادي عشر الهجري - إلاَّ أنَّه استعمل عود الثقاب فأضاء المصباح الذي بدأ في صنعه (سنان) وشارك في تحسينه (ابن يونس) وأنجزه (ابن حمزة) ، استفاد (نابْيَر) مما توصَّل إليه علماؤنا الأفذاذ فصنع جداول اللّوغاريتمات التي أدخلت عليها العديد من التعديلات حتى آلت إلى شكلها الحاضر.

من جهة أخرى فإنَّ ما نشاهده من ارتباط وثيق بين مجموعة الأعداد الكلية، ومجموعة قوى العدد ٢ حيث أن عملية الضرب ٤ ×٨ = ٣٢ في السطر (٢) تقابلها عملية الجمع ٢ + ٣ = ٥، إن هذا الارتباط الذي قاد إلى ادخال مفهوم اللّوغاريتم في الرياضيات، إن دلَّ على شيء فإنما يدلُّ على أن هذا الكون محكم الصنعة، ما وُجد صُدفةً وما خُلق عبثاً، وأنَّ خالقه، جلَّ جلاله، واحدٌ أحد ، ﴿ لَوْ كَانَ فِيهِمَا آلِهَةٌ إِلَّا اللَّهُ لَفَسَدَتَا ﴾ الأنبياء .

وبالنسبة لدور المسلمين في ابتكار اللّوغاريتمات يذهب بعض الباحثين المعاصرين إلى أن الخوارزمي (١٦٤- ٢٣٥هـ) هو الذي ابتكرها وعمل لها جداول تعرف باسمه الذي جرى تحريفه باللّغات الغربية ليصبح (Algorism).

تعال نقطف ثمار هذا الباب ونُجري بعض الحسابات المعقَّدة، حيث سنستعمل الآلة الحاسبة بديلاً عن الجداول للأسباب التي ذكرناها.

مثال (٧-٤٤) :

لو طلب منك إيجاد $\sqrt[5]{٧٥,٦٤٣}$ ، فإنه قبل الآلة الحاسبة ، كانت الطريقة الوحيدة لإيجاد الجواب هو الاعتماد على خواص اللّوغاريتمات والاستعانة بالجداول، وسنقوم بذلك مستعملين الآلة بدلاً من الجداول فنضع :

س = $\sqrt[5]{٧٥,٦٤٣}$ ، فيكون :

لو س = $\frac{١}{٥}$ لو ٧٥,٦٤٣

وبالرجوع إلى الآلة وفق التسلسل الآتي :

75.643 | Log | ÷ | 5 | = | → 0.3757537

ثم نوجد س الذي لوغاريتمه لم يزل على الشاشة فنضغط على الأزرار :

INV | Log | → 2.375493

أي أن : س = ٢,٣٧٥٤٩٣

ولو أردنا إجراء الحساب المباشر دون اللجوء إلى اللوغاريتم وذلك بكتابة :

$\sqrt[5]{٧٥,٦٤٣} = (٧٥,٦٤٣)^{\frac{١}{٥}}$ واستعمال الزر $X^{\frac{1}{Y}}$

أو الزر X^Y لحصلنا على الجواب نفسه في كلتا الحالتين . (تحقَّق من ذلك).

ملحوظة (٧ - ١٠) :

إن بعض الآلات الحاسبة تستعمل الزر X^Y أو الزر $X^{\frac{1}{Y}}$ مباشرة وبعضها الآخر بوساطة الزر INV وكذلك الحال بالنسبة لمقابل اللوغاريتم حيث تحتوي بعضها على زر Log^{-1} وبعضها الآخر تعطينا العدد المقابل للوغاريتم عن طريق :

INV | Log

مثـال (٧-٤٥) :

استعمل الآلة الحاسبة في إيجاد س = $\frac{(١٠,٤٨)^{٣}}{(٠,٠٣٨)^{٢} \times ١٠٠,٥٧}$

(١) بتطبيق اللوغاريتمات. (٢) بالحساب المباشر بدون وساطة اللوغاريتمات.

الحـــــــــــل :

(١) لو س = ٣ لو ١٠,٤٨ - ٢ لو ٠,٠٣٨ - لو ١٠٠,٥٧

نتبع التسلسل الآتي (حيث استخدمنا آلة تحتوي على الزر [INV]) .

[10.48] [Log] [×] [3] [-] [0.038] [Log] [×] [2] [-] [100.57] [Log] [=]

[INV] [Log] → [7925.892986]

فيكون : س ≈ ٧٩٢٥,٨٩٣

(٢) بالحساب المباشر باستعمال آلة تحتوي على الزر [X^Y] ستحصل على الجواب نفسه (تحقَّق من ذلك) .

مثـال (٧-٤٦) :

بدأ تاجر برأس مال قدره ٣٠٠٠٠٠ ريال وكان صافي أرباحه السنوية ٢٢,٥٪ من رأس المال ، كما يؤدي زكاة ماله سنوياً . احسب رأس ماله في نهاية ١٢ سنة، علما بأن الأرباح تضاف سنوياً لتصبح رأس مال جديد للسنة الجديدة .
(يطلب الحل عن طريق اللوغاريتمات مع استعمال الآلة الحاسبة) .

الحـــــــــــل :

الربح السنوي ٢٢,٥ أي أنَّ كل ريال يصبح بعد سنة ١,٢٢٥ ريالاً ، يدفع التاجر في نهاية كل سنة زكاة بواقع ٢,٥ ٪ ، أي أنَّ كل ريال من رصيده السنوى (رأس المال وصافي الأرباح) يُصبح : ١ - ٠,٠٢٥ = ٠,٩٧٥ ريال.

فيكون رصيده في نهاية السنة الأولى ٣٠٠٠٠٠ (١,٢٢٥) (٠,٩٧٥) ريال .

وفي نهاية السنة الثانية ٣٠٠٠٠٠ $(١,٢٢٥)^{٢}$ $(٠,٩٧٥)^{٢}$ ريال .

وهكذا ...

ففي نهاية ١٢ سنة يكون رصيده :

ص = ٣٠٠٠٠٠ $(١,٢٢٥)^{١٢}$ $(٠,٩٧٥)^{١٢}$ ريال

ومن أجل حساب ص نستيد من اللّوغاريتمات فنجد :

لو ص = لو ٣٠٠٠٠٠ + ١٢ لو ١,٢٢٥ + ١٢ لو ٠,٩٧٥

وباستخدام الآلة الحاسبة :

[300.000] [Log] [+] [1.225] [Log] [×] [12] [+] [0.975] [Log] [×] [12]

[=] [INV] [Log] → [252818909]

فيكون رأس المال التاجر في نهاية ١٢ سنة : ٢٥٢٨١٩٠ ريالاً .

مثال (٧-٤٧) :

أوجد ص = $\frac{٠,٦٥٨٢(٦,٠٤٥)^{٣}}{١,٨٩٤٠ + \sqrt[٤]{٩٥٥,٥}}$ مستفيداً من اللّوغاريتمات وباستخدام الآلة الحاسبة.

الحـــــل :

إن وجود الجمع بالمقام لا يسمح لنا بحساب ص بواسطة اللّوغاريتمات مباشرة، لذا فإن علينا أن نحسب المقدار س = $\sqrt[٤]{٩٥٥,٥}$ فيكون:

لو س = $\frac{١}{٤}$ لو ٩٥٥,٥ وباستخدام الآلة الحاسبة نجد :

[955.5] [Log] [÷] [4] [=] [INV] [Log] [5.5597808]

س ≈ ٥,٥٥٩٨ (قربنا الجواب إلى أربعة أرقام عشريَّة كما هو الحال في بقيَّة الأعداد). فيكون :

$$ص = \frac{٠,٦٥٨٢(٦,٠٤٥)^٣}{١,٨٩٤٠ + ٥,٥٥٩٨} = \frac{٠,٦٥٨٢(٦,٠٤٥)^٣}{٧,٤٥٣٨}$$

وعليه فإن : لو ص = لو٠,٦٥٨٢ + ٣ لو ٦,٠٤٥ – لو ٧,٤٥٣٨

باستخدام الآلة الحاسبة نجد :

[0,6582] [log] [+] [6.045] [Log] [×] [3] [-] [7,4538] [Log]

[=] [INV] [Log] ⟶ [19,506038]

ص ≈ ١٩,٥٠٦٠

مثال (٧-٤٨) :

حل في ح كلاًّ من المعادلتين : $١٢^{س} = ١٨$ ، $٣^{٢س+١} = ١٩$

الحـــــــــــل :

(١) $١٢^{س} = ١٨$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين : س لو ١٢ = لو ١٨

فيكون $س = \frac{لو ١٨}{لو١٢}$ وباستخدام الآلة الحاسبة :

[18] [Log] [÷] [12] [Log] = ⟶ [1.1631712]

س ≈ ١,١٦٣

(٢) بالطريقة نفسها نجد : (٢ س + ١) لو ٣ = لو ١٩

$(٢س + ١) = \frac{لو ١٩}{لو٣}$ وباستخدام الآلة الحاسبة

٢س+١ ≈ ٢,٦٨٠

٢س = ١,٦٨٠

س = ٠,٨٤٠

تمارين (٧ ـ ١١)

أوجد قيمة س :

(١) $٢^{س} = ٢٩$ ، (٢) $٢٧٥ = ٤^{س}$ ،

(٣) $٢^{٣س+١} = ١٢٣$ ، (٤) $٥^{س+١} = ٣^{س-٢}$

أوجد قيمة كل مما يلي :

(٥) $\sqrt[٣]{٠,٠٦٨٤}$ (٦) $\sqrt[٥]{٠,١٦٣٤}$ (٧) $(-٠,١٣٢)^{٦}$

(٨) $(٠,٠٢٤٥)^{-٥}$ (٩) $(٢٥,٤)^{-٤}$ (١٠) $\frac{(٦٥,٨)^{٣} \sqrt{٤٩١}}{٩٧}$

أوجد قيمة كل مما يلي :

(١١) $\sqrt[٣]{\frac{(٦٤)^{٥}}{(١٢٣)^{٤}}}$ (١٢) $\frac{\sqrt{٢٦٤} \sqrt[٣]{٤٨٧}}{\sqrt[٤]{٥٦,٣}}$

(١٣) $\frac{(٠,٠٦٣)^{٣} . (٢٨٤)}{\sqrt{٧٨٦}}$ (١٤) $(٤,٥٨١)^{٤} \times \sqrt[٣]{٢١٣,٥}$

(١٥) أوجد طول نصف قطر دائرة مساحتها ٤٥٧,٦ سم^{٢} (π = ٣,١٤١٦)

(١٦) أوجد طول نصف قطرة كرة حجمها ٧,٠٠٤ دسم^{٣}

(حجم الكرة التي نصف قطرها نق = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}) (π = ٣,١٤١٦)

(١٧) احسب: ص = $(١,٠٦)^{١٥} - (١,٠٢)^{٨}$ (قرّب الجواب إلى ٣ أرقام عشرية).

(١٨) احسب : $\sqrt[٥]{\frac{(٢٨١)^{٨} . \sqrt[٣]{٠,٠٠٤٧}}{(٧٨٤٠)^{٦}}}$

تمارين عامة على الباب السابع

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي دون استعمال الآلة الحاسبة أو الجداول :

(١) $(أ + ب)^{٢}$ =

(أ) $أ^{٢} + ب^{٢}$ (ب) $أ^{٢} + ب^{٢} + ٢ أ ب$

(هـ) $أ^{٢} + أ ب + ب^{٢}$ (ء) $(أ + ب)(أ - ب)$

(٢) $\sqrt{\quad ب}$ =

(أ) أ + ب (ب) أ . ب

(هـ) $(أ^{٢} + ب^{٢})^{\frac{١}{٢}}$ (ء) $(أ^{٢})^{\frac{١}{٢}} + (ب^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

(٣) $أ^{-\frac{م}{ن}}$ =

(أ) $أ^{م-ن}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt[ن]{أ^{م}}}$ (هـ) $\frac{١}{\sqrt[م]{أ^{ن}}}$ (ء) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}}$

(٤) لو $\sqrt[٣]{٢٥,٣}$ =

(أ) ٣ لو ٢٥,٣ . (ب) $\frac{لو ٢٥,٣}{٣}$

(هـ) $\frac{١}{٣}$ لو ٢٥,٣ (ء) $\sqrt[٣]{لو ٢٥,٣}$

(٥) $لو_{٢}$ ٢٧ =

(أ) ٣ (ب) $\frac{لو ٢٧}{٣}$ (هـ) ٩ (ء) $\sqrt[٣]{لو ٢٧}$

(٦) لو $س^{٣}$ ص =

(أ) $(لو س)^{٣}$ + لو ص (ب) ٣ لو س + لو ص

(هـ) ٣ (لوس + لوص) (ء) ٣ (لوس) (لوص)

(٧) إذا كان $لو_{س}$ ٦٤ = ٦ فإن س =

(أ) ١٢ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٦٤}{٦}$ (د) ٣

(٨) العبارة $٥^{٤}$ = ٦٢٥ تكافئها العبارة اللوغاريتمية .

(أ) $لو_{٤}$٦٢٥ = ٥ (ب) $لو_{٥}$٤ = ٦٢٥

(جـ) $لو_{٥}$٦٢٥ = ٤ (د) $لو_{٤}$٥ = ٦٢٥

(٩) إذا كان لو٥١٢,٨ = ٠,٩٣٠٠ فإن لو٠,٨٥١٢ =

(أ) $\overline{١}$,٩٣٠٥ (ب) ٠,٠٩٣٠٠ (جـ) ١,٩٣٠٥ (د) ٩,٣٠٥

(١٠) إذا كان لو٢ = ٠,٣٠١٠ وَ لو ٣ = ٠,٤٧٧١ فإن لو ١٢ =

(أ) ١,١٥٥٢ (ب) ١,٠٧٩١ (جـ) ١,٥٩٦٢ (د) ١,٠٧٩٢

حدِّد العبارة الصحيحة والخاطئة واذكر السبب :

(١١) إذا كان ٢ + لو ١,٣٦ = لو س فإن س = ١٣٦

(١٢) لو $\frac{أ}{\sqrt{ب}}$ = لوأ ÷ $\frac{١}{٢}$ لو ب .

(١٣) $ب^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{١}{\sqrt[٤]{ب^{-٣}}}$

(١٤) $٨^{س} = ٣٢$ ⟸ س = $\frac{٥}{٣}$

(١٥) ٦٨ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ = ٦,٨ × $١٠^{٩}$

(١٦) $\sqrt{٣} + \sqrt{٢} = \sqrt{٥}$

(١٧) $\sqrt{٢٠} + \sqrt{\frac{٤}{٥}} - ٣\sqrt{٥} = -\frac{٣}{٥}\sqrt{٥}$

(١٨) ٥,٦ × $١٠^{-٧}$ = ٠,٠٠٠٠٠٠٥٦

(١٩) $\text{لو}_{٢}\ ٤٤ = ٢ \times \text{لو}\ ١١$

(٢٠) $\text{لو}_{٣}\ \text{س} = ٣ \quad \Leftrightarrow \quad \text{س} = ٩$

(٢١) اكتشف الخطأ في البرهان الآتي :

$$\sqrt{\text{أ}}\ .\ \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{أ}\ .\ \text{ب}}$$

إذن $\sqrt{-١}\ \sqrt{-١} = \sqrt{(-١)(-١)}$

ومنه $\sqrt{(-١)^{٢}} = ١$ وبالتالي : $-١ = ١$

أثبت صحة ما يلي :

(٢٢) $\sqrt[\text{م}]{\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}} = \sqrt[\text{ن.م}]{\text{أ}}$

(٢٣) $\text{لو}\ \text{ب}^{-١}.\text{جـ}^{٢} = ٢\text{لو}\ \text{جـ} - \text{لو}\text{ب}$

(٢٤) $\dfrac{٣^{\text{ن}} + ٣^{\text{ن}-١}}{٣^{\text{ن}+١} - ٣^{\text{ن}-١}} = \dfrac{١}{٢}$

(٢٥) $\text{لو}_{٧}٣٤٣ + \text{لو}_{٣}٨١ - ٤ = \text{لو}_{٥}١٢٥$

(٢٦) كتلتا الشمس والأرض على الترتيب: $١,٩٩ \times ١٠^{٣٠}$ كلغ، $٥,٩٧ \times ١٠^{٢٤}$ كلغ ومعدَّل نصفي قطريهما $٦,٩٦ \times ١٠^{٨}$م ، $٦,٣٨ \times ١٠^{٦}$م استفد من هذه المعلومات لتبين أن كثافة الأرض أربعة أمثال كثافة الشمس تقريباً (الكثافة = الكتلة ÷ الحجم).

حل المعادلات الآتية في ح :

(٢٧) $٥^{\text{س}٢+} = ٤^{\text{س}٢+}$

(٢٨) $\text{لوس} + \text{لو}(\text{س}٣-) = ١$

(٢٩) $٢\text{لو}_{٣}\text{س} - \text{لو}_{٣}(\text{س}٢-) = ٢$

(٣٠) $\text{لو}_{٢}\ \text{س}^{٢} = \text{لو}_{٢}\ ١٦ + \text{لو}_{٢}\ ٩$

(٣١) $\text{لو}_{٣}٢\text{س}^{٢} = ٢\text{لو}_{٣}\ ٦ - \text{لو}_{٣}\ ٢$

(٣٢) $\text{لو}٢\text{س} = ٠,٦٤١٥$

(٣٣) $\text{لو}\ |\text{س}| = ٢,٨٩١٠$

(٣٤) $١٠^{\text{لو}(\text{س}٢-)} = ٣$

أوجد قيمة كلٍّ من العبارات التالية :

(٣٥) $٣^{لو_٣ ٥}$ (٣٦) $٩^{لو_٣ ٢}$ (٣٧) $١٦^{لو_٢ ٣}$ (٣٨) $٣^{(لو_٣ ٥ + لو_٣ ٢)}$

إذا علمت أن لو ٥ = ٠,٦٩٩ و لو ٣ = ٠,٤٧٧ فأوجد :

(٣٩) لو ٠,٠٠٥ (٤٠) لو ٣٠٠٠٠٠ (٤١) لو ٠,٢٥ (٤٢) لو ٤,٥

(٤٣) عيِّن قيمة ب لكي يكون للمعادلة. $س^٢ - \sqrt{٢}\,س + لو_{١٠} ب = ٠$ جذران حقيقيان.

احسب كلاً مما يلي :

(٤٤) $\sqrt[٥]{٨,٩٢٦} \div \sqrt{١,٦٣٥}$

(٤٥) $\sqrt[٤]{\dfrac{(٣,٧١٢)^{١٠} \times ٠,٠٣٥}{٠,٤٥٦٨}}$

(٤٦) $(٥,٠٦٢)^{-١٠}(٣,٨٢١)^{٧}$

(٤٧) $\dfrac{(٥,٨٩)^{١٠} \times (٠,٢٧٦٥)^{٣}}{\sqrt[٣]{٠,٠٥٦٧}}$

(٤٨) $\dfrac{\sqrt{٠,٠٠٤٣٦} \times (٤,٨٥)^{٣}}{(٦,٥)^{١٠} \times \sqrt[٥]{٠,٠٠٤٣}}$

الباب الثامن

الإحصاء

٨ - ١ مقدمة .

٨ - ٢ جمع البيانات .

٨ - ٣ التوزيعات والجداول التكرارية .

٨ - ٤ التمثيل البياني للجداول التكرارية .

٨ - ٥ المتوسطات .

٨ - ٦ الإنحراف المعياري .

٨ - ١ مقـــدمــــة :

تزداد حاجتنا إلى عرض المعلومات بأسلوب البيانات الإحصائية عند دراسة العديد من الظواهر الكونية (أو التجريبية) مثل كميات الأمطار الشهرية أو السنوية التي يَمُن الله بها على عباده في منطقة ما، أو التغيُّر في أسعار الذهب أو البترول أو أية قياسات معمليَّة أخرى غير معلومة النتائج مسبقاً. نستخدم الأسلوب الإحصائي لمعرفة سنن الله في خلقه والتدبر فيها مثل دراسة الظواهر الاجتماعية كالزواج والطلاق أو عند دراسة التغيّرات التربوية، أو النفسية في مجتمع ما .

وقد عُرِّف الإحصاء على أنه العلم الخاص بالدولة ، وذلك لاقتصار استخدامه في الأزمنة القديمة على الحكومات والتي كانت تهدف من جمع الإحصاءات السكانية أو الاقتصادية، في الغالب لمعرفة قدرتها على خوض الحروب أو كمية الضرائب التي يمكن جمعها، مثل إحصائيات قدماء المصريين من الفراعنة، وإحصاء السكان في اليونان في عام ٥٩٠ قبل الميلاد تقريباً.

يقال بأن لفظي : « إحصاء » و«يحصي » مشتقان من كلمة « الحصى» لأن الإنسان القديم استخدم الحصى في العد والحساب البدائي. وقد ورد ذكر الإحصاء في كتاب الله عز وجل في إحدى عشرة آية، تُذكِّرُ الإنسان بعجزه وقصوره عن التوصل إلى إحصاء أمور كثيرة كقوله تعالى : ﴿وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا﴾ (سورة الجن، الآية ٢٨) ـ وقوله جلَّ مِنْ قائل : ﴿ وَإِن تَعُدُّوا نِعْمَةَ اللَّهِ لَا تُحْصُوهَا ﴾ - سورتي النحل آية ١٨ وإبراهيم اية ٣٤) .

كما تُذكِّرُ هذه الآيات البيِّنات الإنسانَ أنَّ أعماله محصاة عليه ﴿ وَوُضِعَ الْكِتَابُ فَتَرَى الْمُجْرِمِينَ مُشْفِقِينَ مِمَّا فِيهِ وَيَقُولُونَ يَا وَيْلَتَنَا مَالِ هَٰذَا الْكِتَابِ لَا يُغَادِرُ صَغِيرَةً وَلَا كَبِيرَةً إِلَّا أَحْصَاهَا ﴾ -(سورة الكهف، الآية ٤٩) ـ وأن الإنسان إن نسي ما قدَّمت يداه فإنَّ الله تعالى قد أحصاه ﴿يَوْمَ يَبْعَثُهُمُ اللَّهُ جَمِيعًا فَيُنَبِّئُهُم بِمَا عَمِلُوا أَحْصَاهُ اللَّهُ وَنَسُوهُ وَاللَّهُ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ شَهِيدٌ﴾ (سورة المجادلة ، الآية ٦) ـ .

فالإحصاء ليس غريباً علينا إذن ، نحن المسلمين، وليس بدعاً بالنسبة لنا الاستفادة من علم الإحصاء في بناء مجتمعنا وتنميته والعمل على سد احتياجاته، وعلى تقدّمه وازدهاره، إذْ أنّ إجراء الإحصائات واتباع الأساليب الإحصائية، وجمع المعلومات ، بهدف اتخاذ القرارات بدأت بوقتٍ مبكر منذ بدء بناء المجتمع الإسلامي وتأسيس دولة الإسلام الحنيف، نورد فيما يلي الحوادث الآتية على سبيل المثال لا الحصر:

- عن حُذيفة بن اليمان رضي الله تعالى عنه ، قال : « كنا مع رسول الله صلى الله عليه وسلم فقال : أحصوا لي كم يلفظ بالإسلام، قال : فقلنا يا رسول الله أتخافُ علينا ونحن بين الستمائة والسبعمائة؟، قال : إنكم لا تدرون لعلكم تُبْتلوا، قال : فابتُلينا، حتي جعل الرجل لا يصلّي إلّا سرّاً ».

  يلفظ الإسلام أي ينطق به ـ رواه مسلم / باب ٦٧.

- وفي غزوة بدر الكبرى، عندما وجد المسلمون رجلين يسقيان لقريش سألهما رسول الله صلى الله عليه وسلم : أخبراني عن قريش، قالا : هم والله وراء هذا الكثيب الذي ترى بالعُدْوَةِ القُصوى فقال لهما رسول الله صلى الله عليه وسلم : كَم القوم ؟ قالا : كثير ، قال : ما عِدَّتهم ؟ قالا : لا ندري، قال : كَم ينحرون كلَّ يوم، قالا : يوماً تسَعاً ويوماً عشراً، فقال رسول الله صلى الله عليه وسلم : « القوم بين التسعمائة والألف ».

  فاتَّبع صلى الله عليه وسلم هذا الأسلوب لإحصاءِ جُند العدو، ليكون المسلمون على بيِّنةٍ من الأمر.

- وعندما أراد الفاروق عمر رضي الله تعالى عنه، إبَّان خلافته تقدير ما يجب عليه أن يفرض للمسلمين، جمع ستين مسكيناً وأطعمهم الخبز، فأحصوا ما أكلوا فوجدوه يخرج من جريبين ، ففرض لكلّ إنسان منهم ولعياله جريبين في الشهر ، لأنَّ الجريبين تكفي ستين أكلةً ، فكأنَه قدَّر لكل إنسان أكلتين في اليوم . كما أمر رضي الله تعالى عنه، بكتابة أسماء الناس في قوائم حسب أسبقيَّتهم للإسلام.

- وعندما دخلت العراق نطاق الخلافة الإسلامية، قيست مساحات الأراضي الصالحة للزراعة، وجرى تعيينها حسبَ مُلّاكِها وما تُنْتِجُه من مَحاصيل، كما تم ذلك بالنسبة للأراضي الزراعية في بلاد الشام ومصر .

- وفي أيام الخليفة الزاهد عمر بن عبد العزيز، جرى إحصاء للفقراء والمعاقين في الدولة الإسلامية المترامية الأطراف، لدفع رواتب منتظمة لهم من بيت مال المسلمين.

هذا وإن للإحصاء أهمية في مجتمعنا المعاصر، وذلك بهدف اتخاذ القرارات السليمة المبنيّة على نتائج ما تقدّمه الدراسات الإحصائية.

ومع تقدم الحضارة الإنسانية تعددت استخدامات الإحصاء لتشمل مجالات متعدِّدة من النشاطات الإنسانية، كالصحة والصناعة والتجارة والتنمية. كما استخدمت كثير من المؤسسات، حتى غير الحكومية، الحديثة الإحصائيين لإعداد الدراسات والبحوث لتوضيح مقدار الخدمات التي تقوم بها ومدى أهميتها، وكذلك التخطيط للتوسع في الخدمات التي تقدمها أو لترشيدها.

من أجل ذلك كله قامت حكومة خادم الحرمين الشريفين بالتعداد (أي الإحصاء) العام للسكان والمساكن خلال النصف الأول من شهر ربيع الآخر عام ١٤١٣هـ.

ولتوضيح أهمية الإحصاء، سنورد فيما يلي بعض مجالات النشاطات الإنسانية والتي كان للإحصاء وأساليبه دور في دراسة بعض مظاهرها وبالتالي تطورها :

التعليـــم :

يساعد الإحصاء في إبراز النهضة التعليمية وفي توضيح الوضع التعليمي ومدى توافر بعض عناصر العملية التعليمية مثل أعداد المدارس في مختلف المراحل، أو العاملين فيها، أو مستوياتهم، أو العوامل المساعدة كالمباني والمعامل والكتب ، أو الحاجة إلى دعم بعضها .

السكـــان :

يُستخدم الإحصاء في تقدير أعداد السكان وكيفية إجراء التعداد وكذلك تصنيف السكان حسب العمر والجنس والحالة الاجتماعية وحساب معدَّلات المواليد والهجرة والوفيات .

الطـــب :

يفيد الإحصاء العاملين في العلوم الطبية في دراسه انتشار الأمراض وتصنيفها ومقارنة ذلك بين المدن، أو الدول المختلفة، كما يعتمد بعض الأطباء على الأساليب الإحصائية في دراسة مدى فائدة عقار ما أو مقارنته بعقار آخر .

وهكذا بالنسبة للبحوث الطبية المختلفة، فعندما يضع الطبيب، مثلاً ، في فم المريض ميزان الحرارة، يعلم مسبقاً أن درجة الحرارة للإنسان السليم من الأمراض هي حوالي ٣٧° ، هكذا خلقه الله تعالى فسوَّاه فعدَلَه، في أي صورةٍ ما شاءَ ركَّبَه، إن هذه الدرجة ٣٧° توصَّل إليها العلماء الباحثون نتيجة لعملٍ إحصائي طبقوه على الملايين من البشر .

وما يقال عن درجة حرارة الإنسان السليم، يقال عن ضغط الدم، عن النبض، والسكّر في الدم، والدُسُم (الكوليسترول) في الدم، وغير ذلك.

الـزراعــة :

أصبح للإحصاء دور هام في تصميم التجارب الزراعية والمقارنة بين الأسمدة، أو العوامل البيئية الأخرى كالتربة، ودرجة الحرارة .

مجـالات أخــرى :

يكثر استخدام الأساليب الإحصائية في دراسة كثير من الظواهر المختلفة في العلوم الأساسية كالفيزياء، والكيمياء، والجيولوجيا ، والأحياء، والعلوم الإدارية مثل إدارة الأعمال، والمحاسبة والاقتصاد، والعلوم الإنسانية مثل علم الاجتماع، وعلم النفس، والعلوم العسكرية وغيرها.

من هذه المقدمة نستطيع تعريف الإحصاء بأنَّه الأسلوب العلمي للبحث الذي يهتم بدراسة ظاهرة كونية أو تجريبيَّة ما وذلك عن طريق جمع البيانات اللازمة عنها، وتصنيفها، وعرضها جدولياً أو بيانياً، وتلخيصها، بغرض تفسير الظاهرة المدروسة واستنتاج أو تقدير العلاقات الرياضية التي تحكم تصرّفها لاتخاذ القرار المناسب بشأن أي من هذه الظواهر.

والجدير بالذكر أنه مهما بلغ الإنسان من دقة ودراية، فإن النتائج التي يتوصَّل إليها غالباً ما تكون مقرَّبة، خاصة عندما تكون القضيَّة التي يقوم بدراستها تتعلق بمجموعة كبيرة جداً، مما يضطره للاكتفاء بعينةٍ (أي مجموعة صغيرة نسبياً) تؤخذ عشوائياً، وتعتبر ممثلة للمجموعة الكبيرة، موضوع الدراسة.

خطـوات الدراسـة الإحصـائيـة :

يمكن تلخيص خطوات الدراسة الإحصائية بما يلي :

أولاً : تحديد المشكلة (أو هدف البحث) بدقَّة .

ثـانيـاً : جمع البيانات اللازمة لدراسة المشكلة بعناية.

ثـالثـاً : عرض البيانات ملخَّصة بالطرق الجدولية ، أو البيانية المناسبة.

رابـعـاً : اختصار البيانات بحساب بعض المتوسطات أو خلافها .

خامساً : استنتاج أسباب المشكلة أو مقارنتها مع غيرها أو اقتراح حلول لها .

٨ - ٢ جمع البيانات

ذكرنا أنه لابد من تحديد الهدف أو المشكلة المراد دراستها أولاً، بعد ذلك ننتقل إلى المرحلة الثانية من خطوات الدراسة الإحصائية وهي جمع البيانات الإحصائية.

تعريــف (٨ ـــ ١) :

البيانات الإحصائية عبارة عن معلومات كمِّية (رقمية) أو كيفية (وصفية) صحيحة ودقيقة تُجمع من مصادر محدَّدة وبطريقة سليمة.

تعريـــف (٨ ـــ ٢) :

المجتمع الإحصائي هو مجموعة المفردات التي يجمعها إطار عام واحد أو مجموعة خصائص عامة واحدة.

فالمجتمع الإحصائي، على سبيل المثال، في دراسة أعمار الطلاب في الصف الأول في مدرسة ثانوية، والمكون من ٢٥ طالباً، هو مجموعة الطلاب الذين نبحث عن أعمارهم.

مصادر جمع البيانات :

تنقسم مصادر جمع البيانات اللازمة لأية دراسة إحصائية إلى نوعين : مصادر تاريخية ومصادر ميدانية. وفيما يلي عرض موجز لكل منها.

أولاً : المصادر التاريخية :

يجب أن تسبق عملية جمع البيانات دراسة وافية عن إمكانية توفر بعض أو كل البيانات ، المطلوب جمعها، في الكتب الإحصائية السنوية مثل نشرات مصلحة الإحصاءات العامة بوزارة المالية والاقتصاد الوطني، والكتاب السنوي لإحصاءات التعليم الذي تصدره وزارة التربية والتعليم، والكتاب الإحصائي لوزارة الداخلية ، أو إنجازات التنمية التي تصدرها وزارة التخطيط، والتي قد يكون جمع بياناتها لأسباب أخرى، قد تختلف عن أهداف الدراسة الإحصائية المقصودة ، وتسمى بالمصادر التاريخية. ويساعد استخدام هذه المصادر في توفير الوقت والجهد البشري والتكاليف المادية.

ثانياً : المصادر الميدانية :

أما في حالة عدم توافر البيانات الإحصائية في المصادر التاريخية، فلابد من اتباع أسلوب جمع البيانات من الميدان أو حقل الدراسة وذلك عن طريق إعداد «بطاقة (استمارة) إحصائية » أو استبانة تتضمن مجموعة من الأسئلة والاستفسارات معروضة بطريقة مناسبة.

وتُجمع البيانات من المصادر الميدانية بعدة طرق منها :

أ- المقابلة الشخصية :

تتلخص هذه الطريقة في قيام صاحب الدراسة بمقابلة أفراد المجتمع المراد دراسته، وتوجيه الأسئلة الواردة من البطاقة الإحصائية لكل فرد، وتسجيل إجابته عليها. تُفضّل هذه الطريقة في

المجتمعـات (الإحصائية) التي تكثر الأَمِّية بين أفرادها وتتميّز بدقة المعلومات الواردة فيها. لكنها ربما تستغرق جُهداً وتكاليف مادية كبيرة.

ب ـ المراسلـة (بالبـريـد) :

يقوم المسؤول عن الدراسة بإرسال البطاقة الخاصة بذلك مع إرفاق تعليمات بكيفية تعبئتها وإعادتها عن طريق البريد. وقد يُرفق مع البطاقة ظرف بريدي عليه طابع. ويجب أن تتوافر لدى الباحث، في هذه الحالة، العناوين البريدية للأفراد المراد دراستهم وكذلك وجود خدمات بريدية جيدة قد يستغرق الحصول على البطاقة وقتاً طويلاً وربما احتاج الأمر إلى تذكير بعض أفراد البحث مرة أخرى، وفي الغالب لا يستطيع الباحث الحصول على جميع البطاقات المرسلة .

جـ ـ الهـاتــف :

يقوم الباحث، في هذه الحالة، بالاتصال هاتفياً بأفراد المجتمع المطلوب دراسته، وتسجيل الأجوبة في البطاقة الإحصائية المعدة لذلك. تتميز هذه الطريقة بتوفير الوقت والجُهد اللازمين للانتقال من مكان لآخر. ولكن ينحصر استخدام هذه الطريقة على بعض فئات المجتمع الذين يُتوقَّع أن لديهم هواتف ويمكن الحصول عليها بيُسرٍ مثل عيادات الأطباء ، والصيدليات والمهندسين في قطاع حكومي معيَّن .

أسلـوب جمـع البيانـات :

يتم جمع البيانات بأحد الأسلوبين التاليين :

أولاً : الحصر الشـامـل :

ويكون فيه جمع البيانات من جميع أفراد ومجتمع الدراسة. ويُستخدم في حالة كون المجتمع صغيراً مثل طلاب مدرسة ثانوية أو في حالة تباعد الأزمنة التي تجري فيها الدراسة كالتعداد الشامل للسكان والذي يُفضَّل إجراؤه كلّ عشر سنوات. ويمتاز الحصر الشامل في إعطاء الباحث صورة كاملة عن مجتمع الدراسة . ومن عيوبة، تكاليفه الباهظة، وطول الوقت اللازم لإجرائه وخاصة في المجتمعات ذات الكثافة السكانية الكبيرة .

ثـانـياً: العَـيِّـنـات :

تعريـــف (٨ ـــ ٣) :

العَيِّنة جزء من المجتمع يُختار بطريقة مناسبة ويمثِّل جميع خصائص ذلك المجتمع بصدق.

يكتفي الباحث في أسلوب جمع العيِّنات بدراسة جزء أو مجموعة من مجتمع الدراسة يمكن عن طريقها تعميم الدراسة ونتائجها على كل المجتمع. ويُستخدم أسلوب العيِّنات في دراسة المجتمعات الكبيرة جداً والتي يشار إليها بأنها غير محدودة ، كما يساعد في توفير الجهود والتكاليف وتكون العيِّنة أحياناً هي الأسلوب الوحيد لدراسة مجتمع ما . فلو أردنا معرفة عدد كريّات الدم الحمراء في المليمتر المكعب لمجموعة من المرضى؛ عندئذ يستحيل استخدام أسلوب الحصر الشامل لكل دم المريض، حيث نلجأ في هذه الحالة إلى أخذ عينة أو كمية صغيرة من الدم وفحصها.

ويُلاحظ أن اختيار العيِّنة بطريقة غير مناسبة ، يعني أن العيِّنة لا تمثِّل المجتمع المسحوبة منه تمثيلاً صادقاً ؛ مثل التعرّف على متوسط دخل الأسرة في مدينة الرياض بدراسة دخل مجموعة أسر من أحد الأحياء الشعبية فيها، فمثل هذه الخطأ يؤدّي إلى عدم سلامة النتائج، وبالتالي خطأ القرارات التي نعتمد عليها .

أنـواع العيَّـنـات :

نتَّبع عدة طرق لسحب العيِّنة من مجتمع الدراسة، وذلك حسب طبيعة المجتمع ونوعيّة الدراسة ، ونورد فيما يلي أهم أنواع العيِّنات وأكثرها شيوعاً :

أ ـ العيِّـنـة العشـوائـيـة :

وهي الطريقة التي تختار بها العينة بحيث تكون فرص ظهور أي من عناصر (مفردات) المجتمع فيها متساوية. ويُعرف الأسلوب العشوائي عند عامة الناس بالقرعة. حيث تُكتب ، مثلاً، أسماء أفراد المجتمع أو أرقامها ومن ثم يُسحب العدد المناسب منها لإجراء الدراسة عليه.

ب ـ العينـة العمديـة أو الفرضيـة :

ويكون فيها اختيار العيِّنة بطريقة تناسب أهداف البحث بحيث تتوافر في كل عنصر من عناصر العيِّنة شروط محددة يرى الباحث أنها تساعده على الوصول إلى نتائج أفضل في دراسته؛ مثلا عند رغبتنا في معرفة مدى استيعاب الطلاب لموضوع ما في الرياضيات يجب أن نحلِّل نتائج الامتحان في ذلك الموضوع لطلاب سبق لهم دراسة المنهج نفسه أو الذين درسوا المنهج الذي سيتم تعميمه على بقية المدارس وهكذا. ولا يُعتبر هذا الاختيار عشوائياً .

جـ ـ العيِّـنـة الطبقيـة :

تعتمد أحياناً الإحصائية على بعض الصفات كالعمر والجنس والسكن فيُقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات تبعاً للصفات المكوِّنة له وتسمّى كل مجموعة بطبقة ، ويَختار الباحث عيِّنة عشوائية من كل طبقة، مثلاً عند دراسة المستوى التعليمي لمجتمع ما مكوَّن من ٣٠٠ شخص بحيث كانت نسبة الذكور إلى الإناث ٢ : ٣ وأردنا اختيار عيِّنة من ٥٠ شخصاً فلابد أن نختار ٢٠ شخصاً من (طبقة) الذكور و٣٠ من (طبقة) الإناث بطريقة العيِّنة العشوائية.

تمـــاريـــن (٨ ــ ١)

(١) عرّف الإحصاء، واذكر بعض مجالات استخدامه.

(٢)اذكر بعض الإحصاءات التي قام بها المسلمون.

(٣) تحدث عن الفائدة من دراسة الإحصاء وما هي خطوات الدراسة الإحصائية .

(٤) ماذا يُقصد بالمصادر التاريخية والمصادر الميدانية للبيانات ؟

(٥) اذكر أهم طرق جمع البيانات من المصادر الميدانية مبيِّناً مزايا وعيوب كل منها .

(٦) قارن بين أسلوبي الحصر الشامل والعيِّنات من حيث الدقة والوقت والمال اللازم لإجراء كلٍّ منهما.

(٧) اذكر أهم العيِّنات الإحصائية وكيفية الحصول عليها .

٨ ـ ٣ التوزيعات والجداول التكرارية :

بعد جمع البيانات في نماذج إحصائية، نصل بذلك إلى مرحلة مهمة من خطوات العملية الإحصائية وهي وضع البيانات الإحصائية في جداول لتبسيط دراستها ومن ثم التعرّف علي الخصائص الرئيسية لها.

وسنعرض فيما يلي كيفية وضع البيانات الإحصائية في جداول حسب طبيعة البيانات الوصفية أو الكمِّية والجداول التكرارية المتجمعة للبيانات الكمِّية .

أولاً : البيانات الوصفية (أو النوعية) :

وهي البيانات التي لا يمكن التعبير عن مفرداتها بأرقام عددية مثل الصفات، كالحالة الإجتماعية (لم يتزوج بعد ـ متزوج ـ مطَلّق ـ أرمل) والحالة التعليمية (أمي ـ يقرأ ويكتب فقط ـ يحمل مؤهلاً ثانوياً ـ يحمل مؤهلاً جامعياً أو أكثر) ، والتقدير في الامتحان (راسب ـ مقبول ـ جيد ـ جيد جداً ـ ممتاز) .

نضع هذه البيانات في جداول تكرارية وذلك بحصر الصفات التي تشملها هذه البيانات وإيجاد عدد المفردات المناظرة لكل صفة من هذه الصفات .

مـثـــال (٨-١) :

تُمثِّل البيانات التالية تقديرات ٤٠ طالباً من الامتحان النهائي في الصف الأول الثانوي من المدرسة أ.

جــدول (٨ – ١)

جيد	جيد جدًّا	راسب	ممتاز	ممتاز	جيد	جيد
جيد جدًّا	مقبول	راسب	جيد جدًّا	جيد	مقبول	جيد
مقبول	جيد	مقبول	جيد	جيد جدًّا	جيد	جيد
ممتاز	جيد	راسب	جيد جدًّا	ممتاز	جيد	ممتاز
جيد جدًّا	راسب	جيد جدًّا	جيد	راسب	راسب	مقبول
جيد	جيد جدًّا	جيد	جيد	جيد		

جـدول تقـديـرات الطـلاب

وسوف نقوم بتفريغ هذه البيانات في جدول تكراري ، وتتلخص طريقة ذلك فيما يلي :

أولاً : نرسم جدولاً لتفريغ البيانات من ثلاثة أعمدة، يحتوي العمود الأول على الصفات، أو التقديرات في مثالنا الحالي، ويحتوي العمود الثاني على العلامات ، أما العمود الثالث فيحتوي على عدد المفردات التي تحمل تلك الصفة ، أي عدد الطلاب الذين نجحوا بتقدير ممتاز أو جيد جدًّا ... ، وهي عدد العلامات في الصف المناظر من العمود الثاني كما في الجدول (٨ – ٢).

ثانياً : نقوم بتفريغ الجدول (٨–١) في الجدول (٨–٢) وذلك بأن نقرأ الصفات الموجودة في الجدول (٨–١) ، وليكن ذلك أفقياً مثلاً، فنضع خطًّا مائلاً (/) أمام أية صفةكلما ظهرت، وفي حالة الحصول على أربعة خطوط (////) فإننا نضع الخط الخامس في الاتجاه الآخر (~~////~~) عند ظهور تلك الصفة للمرة الخامسة.

جـــدول (٨ – ٢)

التـقـديـر	العـلامـــــــــات	التكرار (عدد الطلاب)
ممتاز	卌	٥
جيد جدًّا	卌 ///	٨
جيد	卌 卌 卌 /	١٦
مقبول	卌	٥
راسب	卌 /	٦
المجمـــوع	————	**٤٠**

جـدول التـفـريـغ

ثالثاً : نضع عدد العلامات أمام كل تقدير في العمود الثالث والتي تسمى **بالتكرارات**، ويجب ملاحظة أن يكون مجموع تكرارات التقدير مساوياً لعدد مفردات بيانات الجدول (٨ – ١) .

رابعاً : للحصول على التوزيع التكراري أو اختصاراً الجدول التكراري لبيانات الجدول (٨ – ١) ، نأخذ العمودين الأول والأخير من الجدول (٨ – ٢) فنحصل على الجدول (٨ – ٣) .

جـــدول (٨ – ٣)

التـقـديـر	التكرار (عدد الطلاب)
ممتاز	٥
جيد جدًّا	٨
جيد	١٦
مقبول	٥
راسب	٦
المجمـــوع	**٤٠**

الجـدول التكـراري «أ»

مـثـــال (٨-٢) :

إذا كانت نتيجة الامتحان النهائي لمجموعة مكوَّنة من ثلاثين طالباً من الصف الأول الثانوي في المدرسة ب هي كما في الجدول التكراري (٨-٤) .

جــدول (٨ – ٤)

التـقـديـر	التكرار (عدد الطلاب)
ممتاز	٣
جيد جدًّا	٦
جيد	١٠
مقبول	٦
راسب	٥
المجمــوع	**٣٠**

الجـدول التكـراري «ب»

فمن الواضح أنه لايمكن المقارنة بين نتائج المدرستين أ ، ب عن طريق الجداول التكراريـة، لذلك نلجـأ إلى إنشاء جدول التوزيع التكراري النسبي أو جدول التكرار النسبي .

تعريـــف (٨ ــ ٤) :

التكرار النسبي لأي صفة هو تكرار تلك الصفة مقسوماً على مجموع التكرارات.

نعمل الآن الجدول التكراري النسبي للتقديرات في المدرستين أ، ب وذلك بإضافة عمود ثالث للجدول التكراري يكون عنوانه التكرار النسبي. كما يمكن إضافة رابع للتكرار المئوي كما في الجدولين (٨ – ٥) و (٨ – ٦) .

تعريـــف (٨ ــ ٥) :

التكرار المئوي لأي صفة هو التكرار النسبي لتلك الصفة مضروباً في ١٠٠ .

جــدول (٨ - ٥)

التقدير	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوي
ممتاز	٥	٠,١٢٥	١٢,٥
جيد جدًّا	٨	٠,٢	٢٠
جيد	١٦	٠,٤	٤٠
مقبول	٥	٠,١٢٥	١٢,٥
راسب	٦	٠,١٥	١٥
المجموع	٤٠	١,٠٠٠	١٠٠

الجـدول التكـراري والنسبي « أ »

جــدول (٨ - ٦)

التقدير	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوي
ممتاز	٣	٠,١	١٠
جيد جدًّا	٦	٠,٢	٢٠
جيد	١٠	٠,٣٣	٣٣
مقبول	٦	٠,٢	٢٠
راسب	٥	٠,١٧	١٧
المجموع	٣٠	١,٠٠	١٠٠

الجـدول التكـراري والنسبي «ب»

ومن ذلك يمكن المقارنة مثلاً، بين نتائج المدرستين بأن ٪٢٠ من طلاب المدرستين حصلوا على تقدير جيد جدًّا ، بينما كانت نسبة الرسوب في المدرسة ب ١٧ ٪ أكبر من نسبة الرسوب في المدرسة أ والتى تساوى ٪١٥ .

ثانياً : البيانـات الكمِّيـة (العـدديـة) :

وهي البيانات التي يمكن التعبير عن مفرداتها بقيم عددية مثل درجة الطالب في الامتحان، أو السن، أو الدخل ، و عدد أفراد الأسرة أو أعداد الطلاب في كل فصل دراسي، ... إلخ .

وهنا نلاحظ نوعين من البيانات : **مستمرة** مثل درجات حرارة الجو التي قد

تأخذ أي قيمة صحيحة أو حقيقية. وقد تكون البيانات **متقطعة** كعدد أفراد أسرة والذي يتكون مثلاً، من ٢ أو ٣ أو ٤ ، وهكذا .. ولوضع البيانات الكمِّية في جداول التوزيع التكراري، تقسم البيانات إلى فترات (مجالات) متساوية الطول عادة، تسمى **فئات**. ونضع العلامة الناتجة من أي مفردة أمام الفئة التي تقع فيها قيمة تلك القراءة. ولتحديد طول الفئة يجب مراعاة ما يلي :

أولاً : تحديد المدى الذي تنتشر فيه البيانات .

ثانياً : اختيار عدد مناسب من الفئات بين ٦ إلى ١٢ فئة .

ثالثاً : يجب ألاَّ يكون طول الفئة صغيراً جدًّا حيث يفضّل أن تحتوي الفئة على مالا يقل عن خمس مفردات حتى لا تفقد معنى تلخيص البيانات .

رابعاً : يجب ألَّا يكون طول الفئة كبيراً جدًّا فنحصل على عدد قليل من الفئات لا تعبِّر عن خصائص انتشار البيانات .

مثـــال (٨-٣) :

البيانات التالية تمثل الأجر اليومي لثمانين عاملاً في أحد المصانع بالريال .

جــدول (٨ – ٧)

٥٥	٧٢	٨٩	٦١	٥١	٨٢	٥٠	٦٠	٦٣	٩١
٨٢	٨١	٨٩	٨٣	٧٥	١٠٢	٧٤	٨٤	١٠٠	٧٧
١٠٥	٦١	٥٩	٧١	٨١	٨٥	٧٥	٨٦	٦٣	٧١
٨١	٦٥	٨١	٨٠	٨٥	٥٨	٨١	٩٠	٨٩	٨٨
٩١	١٠١	٩٩	٧٥	١١٨	٧٧	٥١	١١٢	٦٩	١١٩
٧٨	١٠٩	٥٦	٨٣	٨١	٨٥	٧٣	٨٢	٦٦	٩٥
١٠٧	١١٢	٥٦	٨٤	١١٥	٦٦	٦٥	١١٧	١٠٢	٦٧
٩١	٩٥	٧٥	٨٨	٩٦	٧٢	٧٤	١٠٦	٦٥	٨٧

جدول أجــور العمــال اليوميـة

لإيجاد جدول تفريغ البيانات نتَّبع الخطوات التالية :

أولاً : نُحدِّد المدى المطلق للبيانات وهو الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة، وفي مثالنا الحالي :

المدى المطلق = ١١٩ - ٥٠ = ٦٩ ريالاً

ثانياً : نختار طولاً مناسباً بمراعاة الشروط السابقة وفي هذا المثال أنسب طول للفئة هو ١٠ ريالات وبالتالي سيكون لدينا سبع فئات متساوية الطول .

الفئة الأولى : تشمل الأجور من ٥٠ إلى ٥٩ وتكتب ٥٠ - ٥٩ أو ٥٠ - ،

وتشمل الفئة الثانية : الأجور من ٦٠ إلى ٦٩ وتكتب ٦٠ - ٦٩ أو ٦٠ - ،

ونستمر على الأسلوب نفسه حتى نصل إلى الفئة الأخيرة التي تشمل الأجور من ١١٠ إلى ١١٩ ونكتب ١١٠ - ١١٩ أو ١١٠ - .

والطريقة الثانية لكتابة حدود الفئات بالصورة :

٥٠ - ، ٦٠ - ، .... ، ١١٠ -

تعني أن الفئة الأولى تحتوي على الأجور من ٥٠ إلى أقل من ٦٠ أي أن الأجر ٥٩,٧ ريالاً مثلاً يقع في الفئة الأولى .

أما الطريقة الأولى، فتستخدم لكتابة الفئات إذا كانت الأجور مقرَّبة لأقرب عدد صحيح وهي :

٥٠ - ٥٩ ، ٦٠ - ٦٩ ، .... ، ١١٠ - ١١٩

وفي مثل هذه الحالة فإن الأجر ٥٩,٧ ريالاً مثلاً يقع في الفئة الثانية. والأجر ٥٩,٢ يقع في الفئة الأولى وهذه الطريقة تعني أن الحدود الفعلية للفئات هي ٤٩,٥ ≤ س < ٥٩,٥ ، ٥٩,٥ ≤ س < ٦٩,٥ .... ، ١٠٩,٥ ≤ س < ١١٩,٥.

ثالثاً : نكوّن جدول تفريغ بثلاثة أعمدة وهي على التوالي عمود الفئات، حسب الطريقة الأولى لكتابة الفئات، عمود العلامات، وأخيراً عمود التكرارات أو عدد العمَّال في كل فئة.

جـــدول (٨ – ٨)

فئات أجور العمال بالريال	العلامــــــــات	التكرار (عدد العمال)
٥٠ –	~~||||~~ |||	٨
٦٠ –	~~||||~~ ~~||||~~ ||	١٢
٧٠ –	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	١٤
٨٠ –	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||||	٢٤
٩٠ –	~~||||~~ |||	٨
١٠٠ –	~~||||~~ |||	٨
١١٠ –	~~||||~~ |	٦
المجمــوع	———	**٨٠**

جـدول تـفـريـغ أجــور العمــال

ويمكن عمل الجدول التكراري وكذلك الجدول التكراري النسبي والمئوي كما في البيانات الوصفيَّة غير أننا نستبدل الصفات في هذه الحالة بمجموعة من الفئات العددية وبذلك نحصل على الجدولين (٨ – ٩) و (٨ – ١٠) .

جـــدول (٨ – ٩)

الفئـات	التكرار
٥٠ –	٨
٦٠ –	١٢
٧٠ –	١٤
٨٠ –	٢٤
٩٠ –	٨
١٠٠ –	٨
١١٠ –	٦
المجموع	٨٠

الجــدول التكــراري

جـــدول (٨ – ١٠)

الفئـات	التكرار النسبي	التكرار المئوي
٥٠ –	٠,١	١٠
٦٠ –	٠,١٥	١٥
٧٠ –	٠,١٧٥	١٧,٥
٨٠ –	٠,٣	٣٠
٩٠ –	٠,١	١٠
١٠٠ –	٠,١	١٠
١١٠ –	٠,٠٧٥	٧,٥
المجموع	١,٠٠	١٠٠

الجـدول التكراري النسبي والمئوي

نلاحظ بعد توزيع مفردات البيانات على الفئات في الجدول التكراري السابق، أنه لا يمكن معرفة القيم الأصلية للمفردات وكل ما يمكن الوصول إليه هو عدد القراءات التي تقع في تلك الفئة، مثلاً أجور ٨ عمال من المصنع تقع في الفئة الأولى وأجور ١٢ عاملاً تقع في الفئة الثانية .. وهكذا .

ثالثاً : الجداول التكرارية المتجمِّعة :

يوجد نوعان من الجداول التكرارية المتجمِّعة وهما الجدول المتجمِّع الصاعد والجدول المتجمِّع النازل.

لو كان المطلوب في الدراسة الإحصائية معرفة عدد العمال الذين يتقاضون أقل من ٧٠ ريالاً من مجموعة العمال محل الدراسة، يكون عددهم ٨ + ١٢ = ٢٠ عاملاً. كما قد يكون المطلوب معرفة عدد العمال الذين يتقاضون أجراً يومياً أقل من ٨٠ ريالاً، فيكون عددهم ٨ + ١٢+ ١٤ = ٣٤عاملاً. يسمى الجدول الذي يحتوي على أعداد العمال الذين يتقاضَون أقل من الحدود العليا للفئات بالجدول المتجمِّع الصاعد. أما الجدول الذي يحتوي على أعداد العمال الذين يتقاضَون أكبر من الحدود الدنيا للفئات فيسمى بالجدول المتجمع النازل كما هو واضح في الجدولين (٨ – ١١)، (٨ – ١٢) .

جـــدول (٨ – ١١)

حدود الفئات العليا	التكرار
أقل من ٦٠	٨
أقل من ٧٠	٢٠
أقل من ٨٠	٣٤
أقل من ٩٠	٥٨
أقل من ١٠٠	٦٦
أقل من ١١٠	٧٤
أقل من ١٢٠	٨٠

الجدول المتجمِّع الصاعد

جـــدول (٨ – ١٢)

حدود الفئات الدنيا	التكرار
٥٠ فأكثر	٨٠
٦٠ فأكثر	٧٢
٧٠ فأكثر	٦٠
٨٠ فأكثر	٤٦
٩٠ فأكثر	٢٢
١٠٠ فأكثر	١٤
١١٠ فأكثر	٦

الجدول المتجمِّع النازل

٨ - ٤ التمثيل البياني للجداول التكرارية :

تعلَّمنا فيما سبق كيفية تنظيم وتلخيص البيانات الإحصائية بواسطة جداول تكرارية مختلفة. وسندرس الآن كيفية تمثيل الجداول السابقة بيانياً. وهدف التمثيل البياني تبسيط عرض البيانات وكيفية توزيعها بسرعة أكثر .

ومن أهم طرق عرض البيانات التي سنتعرض لها هي :

١ ـ الأعمدة البيانية. ٢ ـ المدرَّج التكراري.

٣ ـ المضلع التكراري. ٤ ـ المنحني التكراري.

٥ ـ المنحنيات المتجمعة. ٦ ـ القطاعات الدائرية .

أولاً : الأعمدة البيانية :

نستخدم الأعمدة البيانية غالباً، في تمثيل البيانات الوصفيَّة، كما يمكن استخدامها للمقارنة بين ظاهرة ما في مجتمعين مختلفين وتسمى الحالة الأخيرة بالأعمدة المزدوجة.

مثـــال (٨-٤) :

استخدم بيانات الجدول (٨ – ٣) لرسم الأعمدة البيانية :

الحـــــــــل :

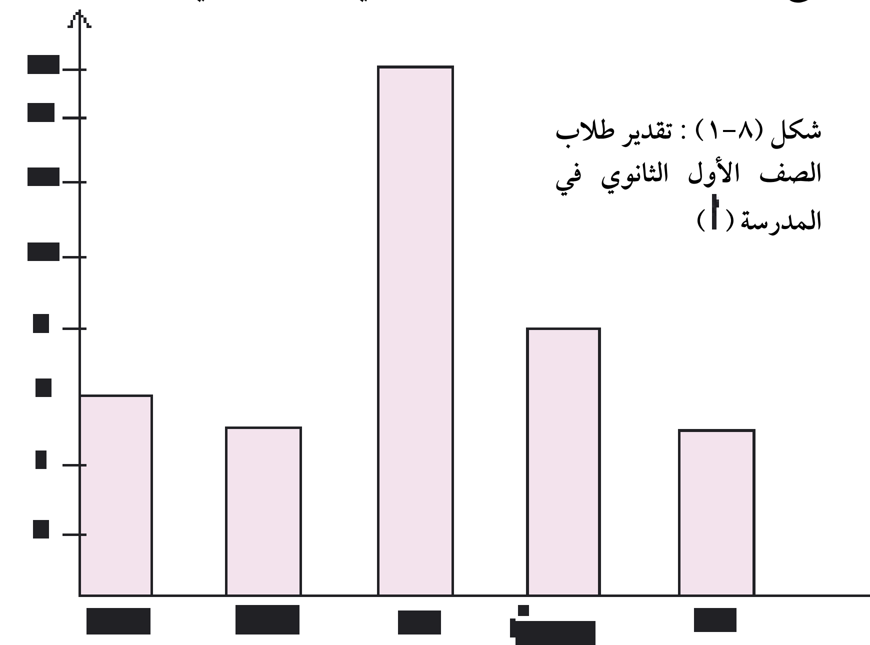
ولعمل ذلك نتّبع الخطوات التالية :

١ ـ نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقي (أو المحور السيني) والآخر رأسي (أو المحور الصادي).

٢ ـ نحدِّد مثلاً ، ٢سم لكل تقدير : راسب، مقبول ، جيد ، جيد جدًّا، ممتاز على المحور الأفقي.

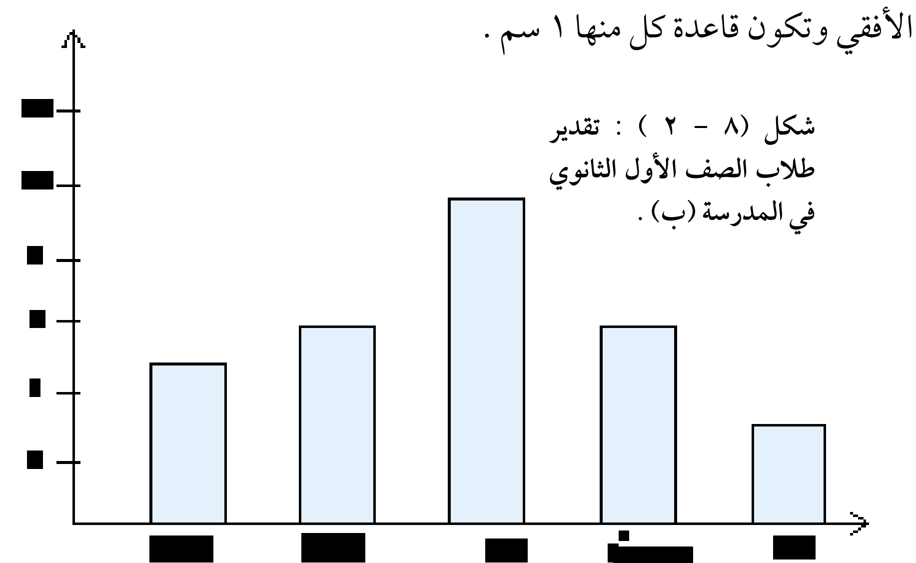
٣ ـ نرسم مستطيلات على المحور الأفقي طول قاعدة كل منها ١ سم ونبدأ من بداية مجال كل تقدير ويكون ارتفاع كل منها يساوي التكرار المناظر لتلك الفئة أو المتناسب معه، ثم نظلِّل هذه المستطيلات.

٤ ـ نضع تعريفاً تحت الشكل يبيِّن البيانات التي يمثلها كما في الشكل (٨ – ١).



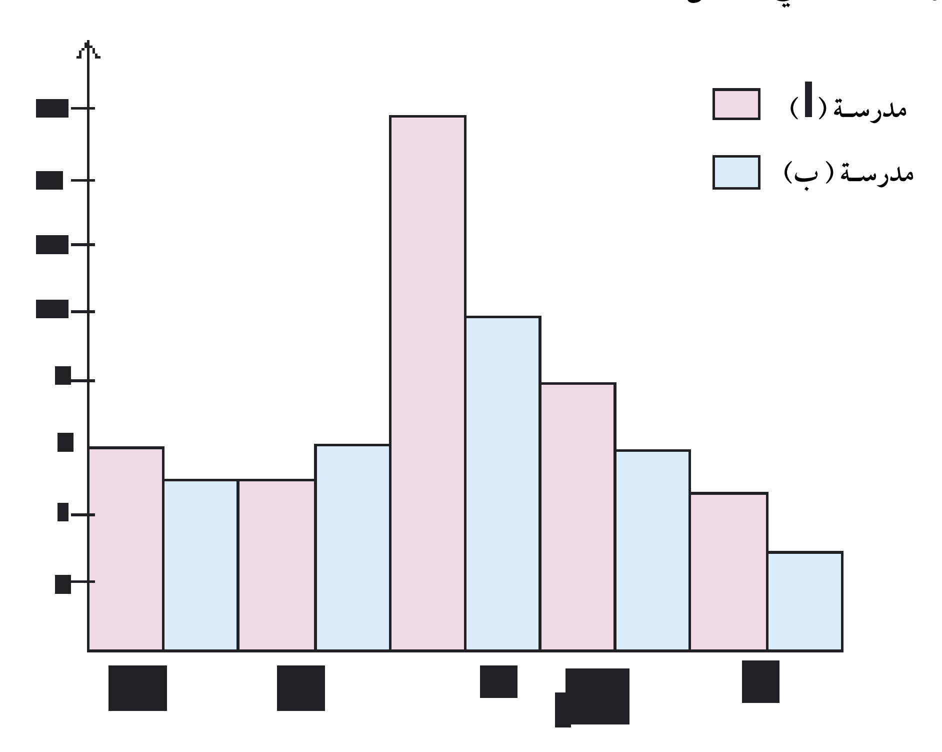
شكل (٨-١) : تقدير طلاب الصف الأول الثانوي في المدرسة (أ)

ونستخدم الطريقـة نفسها لرسـم الأعمدة البيانية لبيانات الجدول (٨ – ٤) ماعدا كون قاعدة المستطيلات تبدأ بعد ١ سم من بداية فترة التقدير على المحور الأفقي وتكون قاعدة كل منها ١ سم .



شكل (٨ – ٢) : تقدير طلاب الصف الأول الثانوي في المدرسة (ب) .

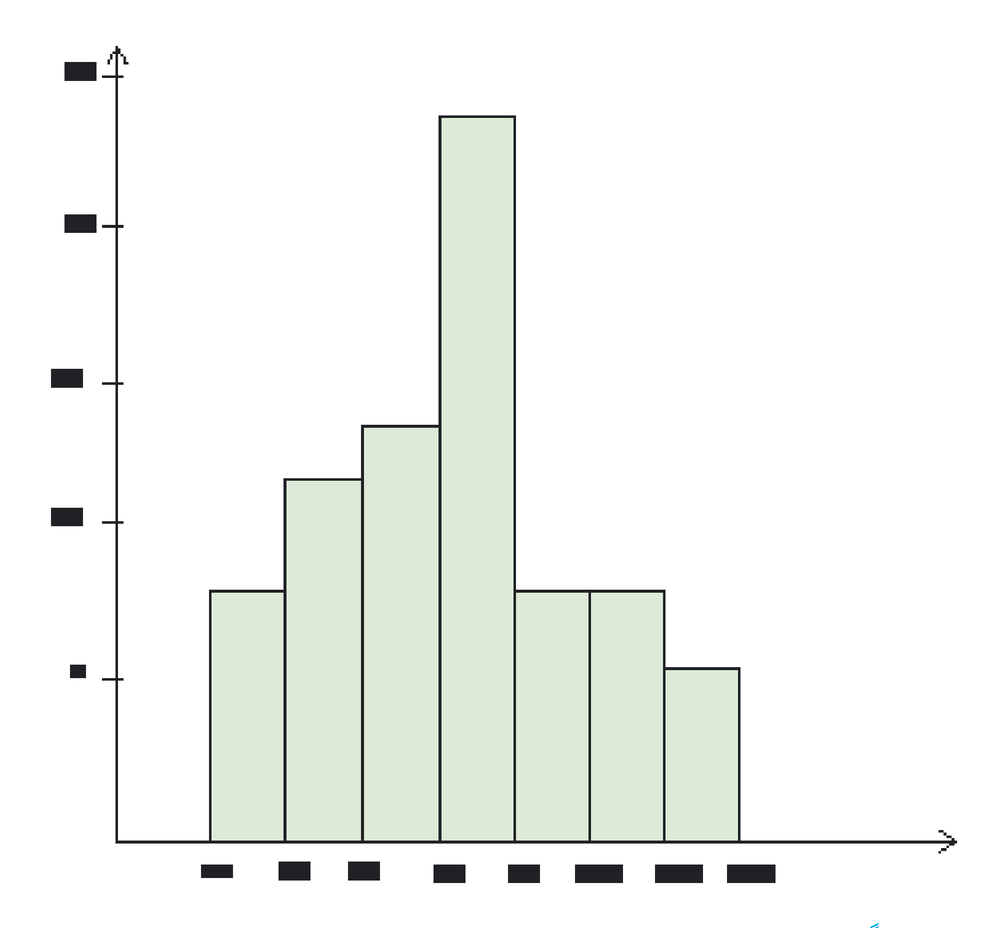
بوضع الشكلين (٨-١) و (٨-٢) في شكل واحد نحصل على الأعمدة البيانية المزدوجة كما في الشكل (٨-٣).



شكل (٨-٣) : تقديرات طلاب الصف الأول الثانوي في مدرستي (أ) و (ب) .

ثانياً : المدرَّج التكراري :

يُرسم المدرَّج التكراري، كما في حالة الأعمدة البيانية، وهو عبارة عن مستطيلات رأسية متلاصقة قاعدة كل منها عبارة عن طول الفئة المناظرة لذلك المستطيل وارتفاع كل منها يساوي (أو يتناسب مع) تكرار تلك الفئة . ويراعى أن يكون تمثيل الفئات على المحور الأفقي حسب حدودها ولتوضيح ذلك نستخدم بيانات الجدول (٨ - ٩) لأجور العمال فنحصل على الشكل (٨ - ٤) .



ثـالثـاً : المضلـع التكـراري :

يُرسم المضلع التكراري كما في الحالتين السابقتين من التمثيل البياني، على أن نُحدِّد على المحور الأفقي مراكز الفئات ، حيث إنَّ :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى للفئة}}{٢}$$

تُمثِّل كل فئة من فئات الأجر بنقطة إحداثيها السيني (الأفقي) مركز الفئة وإحداثيها الصادي (الرأسي) التكرار المناظر لتلك الفئة. ثم نوصل هذه النقاط بقطعٍ مستقيمة فنحصل على المضلع التكراري.

مـثـــال (٨-٥) :

استخدم بيانات الجدول (٨ – ٩) لرسم المضلع التكراري .

نلاحظ أن مركز الفئة الأولى = $\frac{٦٠ + ٥٠}{٢}$ = ٥٥

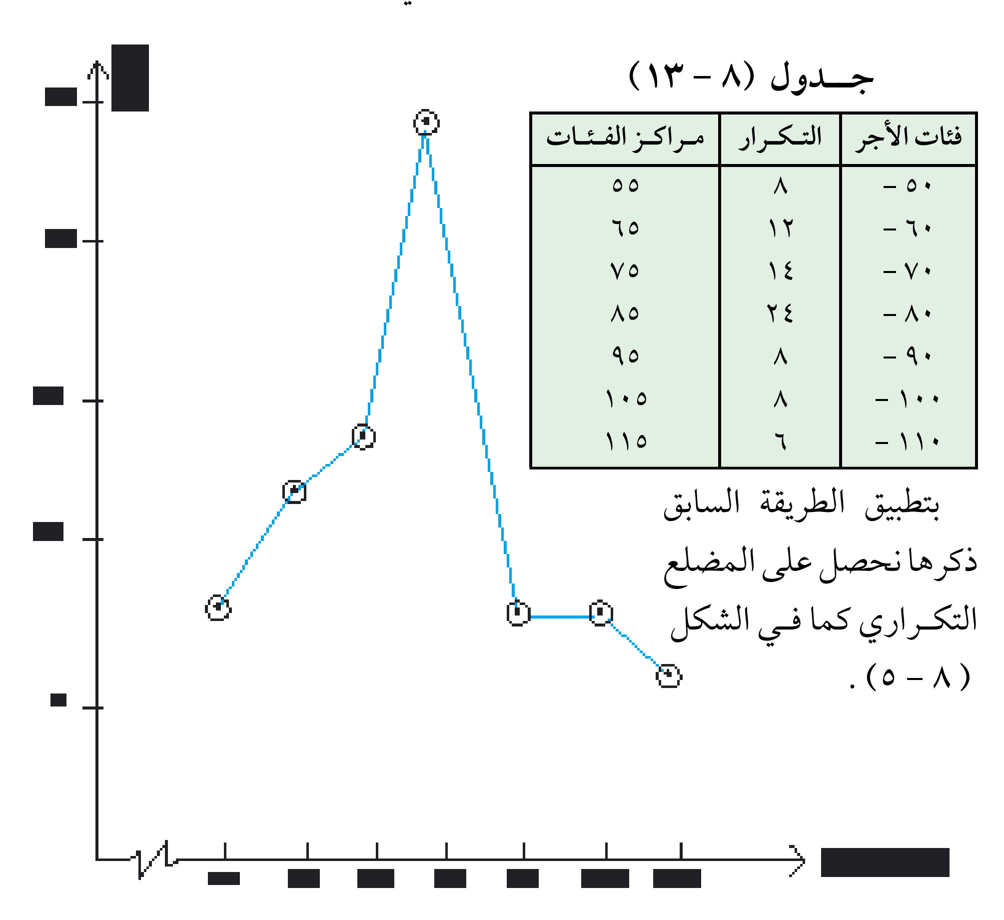
ومركز الفئة الثانية = $\frac{٧٠ + ٦٠}{٢}$ = ٦٥

وبالطريقة نفسها نجد مراكز بقية الفئات كما في الجدول (٨ – ١٣).

جـــدول (٨ – ١٣)

فئات الأجر	التكـرار	مـراكـز الفـئـات
٥٠ –	٨	٥٥
٦٠ –	١٢	٦٥
٧٠ –	١٤	٧٥
٨٠ –	٢٤	٨٥
٩٠ –	٨	٩٥
١٠٠ –	٨	١٠٥
١١٠ –	٦	١١٥

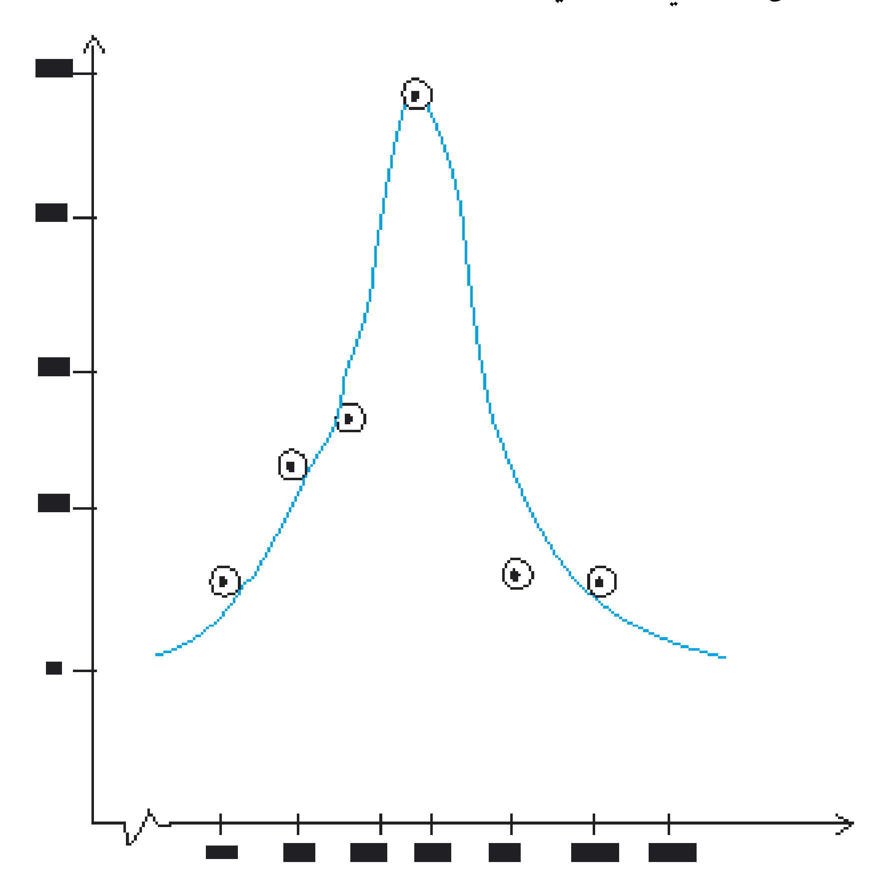
بتطبيق الطريقة السابق ذكرها نحصل على المضلع التكـراري كما فـي الشكل (٨ – ٥) .



شكل (٨ – ٥) : المضلع التكراري لأجور العمّال

رابعـاً : المنحـنـى التكـراري :

نتبع في رسم المنحنى التكراري خطوات رسم المضلَّع التكراري نفسها ولكن بدلاً من توصيل كل نقطتين متجاورتين بقطعة مستقيمة بالمسطرة، فإننا نصل كل نقطتين بمنحن ممهَّد باليد أو بشريط مرن ويجب أن يكون المنحني إنسيابياً وحتى لو اضطررنا إلى عدم مروره بعدد قليل من النقاط، بحيث يمر بقربها . والشكل (٨-٦) يمثل المنحني التكراري لبيانات الجدول (٨ - ١٣).



خامسـاً : المنحنيات المتجمِّعة :

سبق أن تعلّمنا كيف نجد الجدول المتجمِّع الصاعد والنازل من الجدول

التكراري . وبتمثيل هذين الجدولين بيانياً نحصل على المنحني المتجمع الصاعد والمنحني المتجمع النازل.

المنحني المتجمع الصاعد :

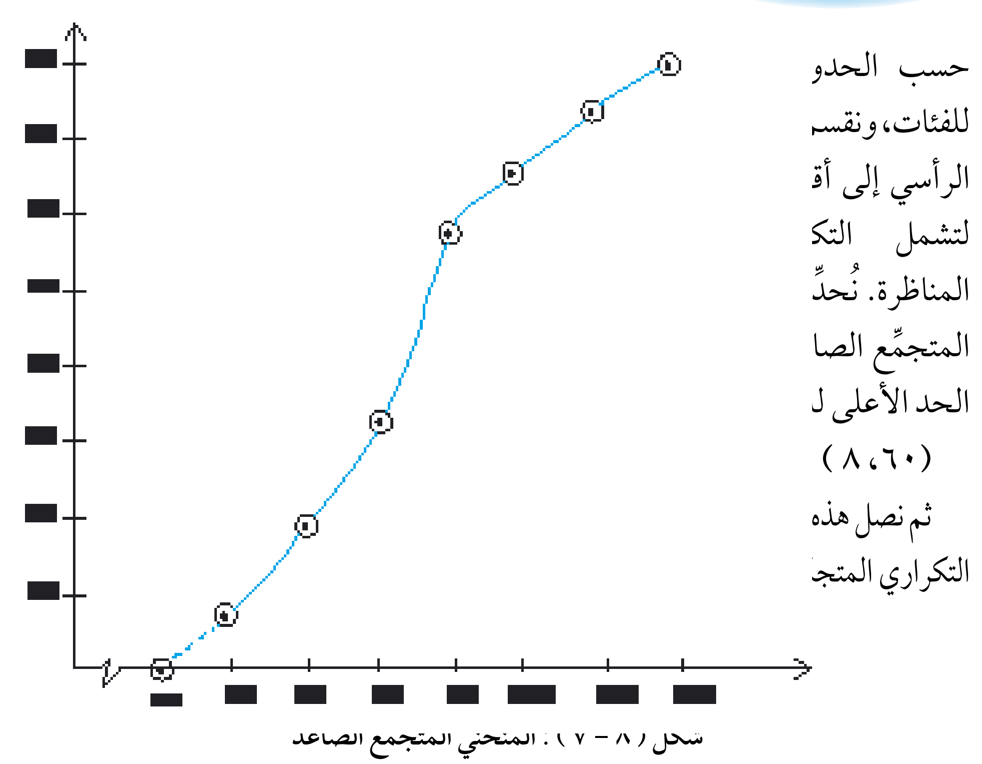
نرسم محورين متعامدين ونخصِّص المحور الأفقي للحدود العليا للفئات، والمحور الرأسي للتكرارات المتجمِّعة. ثم نحدِّد النقاط على الشكل بحيث تكون الإحداثيات السينية للنقط هي الحدود العليا للفئات والإحداثيات الصادية لها هي التكرارات المتجمِّعة الصاعدة المناظرة لتلك الفئات.

مـثـــال (٨-٦) :

ارسم المنحني المتجمع الصاعد باستخدام بيانات الجدول (٨ – ١١) .

الحـــــــــل : بعد رسم المحورين المتعامدين، نقسم المحور الأفقي

حسب الحدو
للفئات، ونقسـ
الرأسي إلى أقـ
لتشمل التكـ
المناظرة. نُحدِّ
المتجمِّع الصا
الحد الأعلى لـ
(٨،٦٠)
ثم نصل هذه
التكراري المتجـ



شكل (٨ – ٧) : المنحني المتجمع الصاعد

المنحني المتجمِّع النازل :

نرسم محورين متعامدين ، كما في المنحني المتجمِّع الصاعد، على أن نخصِّص المحور الأفقي للحدود الدنيا للفئات والمحور الرأسي للتكرارات المتجمِّعة النازلة المناظرة لها .

مثـــال (٨-٧) :

استخدم بيانات الجدول المتجمِّع النازل (٨-١٢) لرسم المنحني المتجمِّع النازل.

الحـــــــل :

بعد رسم المحورين المتعامدين، نقسم المحور الأفقي حسب الحدود الدنيا للفئات، ونقسم المحور الرأسي إلى أقسام متساوية بحيث يشمل مجموع التكرارات. نُحدِّد النقط بأخذ الحد الأدنى للفئة مع التكرار المتجمع النازل، وباستخدام جدول (٨ - ١٢) تكون النقط هي (٥٠ ، ٨٠)، (٦٠ ، ٧٢)، ......، (١١٠ ، ٦) . نصل بين هذه النقط بخط ممهَّد لنحصل على المنحني المتجمِّع النازل كما في الشكل (٨ - ٨).

شكل (٨ - ٨) : المنحني المتجمِّع النازل

سادساً : القطاعات الدائرية :

إذا كانت البيانات المتوافرة لدينا عبارة عن مجموع مقسَّم إلى عدة أجزاء فيمكن تمثيل هذه البيانات بمساحة دائرة ، يُمثِّل كل جزء من هذه البيانات قطاعاً من الدائرة تتناسب مساحته مع ذلك الجزء من البيانات. ويتم ، عادة، تمييز كل قطاع بلون (أو تظليل) مختلف من غيره ولرسم الدوائر الممثلة للبيانات نتبع الخطوات التالية :

١ ـ نرسم دائرة ذات مساحة مناسبة .

٢ ـ نحدِّد زاوية كل قطاع باستخدام العلاقة التالية :

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة (تكرار) الجزء الممثَّل بالقطاع}}{\text{مجموع القيم (التكرارات)}} \times ٣٦٠^\circ$$

٣ ـ بعد تحديد الزاوية المناظرة لكل قطاع نستخدم المنقلة لتحديد الزوايا على الدائرة مع ملاحظة أن مجموع زوايا القطاعات يجب أن يُساوي ٣٦٠°

مثال (٨-٨) :

البيانات التالية تمثّل عدد السيارات المنطلقة من إحدى المدن الصغيرة إلى مكة المكرمة خلال الخمسة أيام الأولى من شهر ذي الحجة، حيث أ ترمز للسيارات التي سعة كلٍّ منها ٩ ركاب ، ب للسيارات التي سعة كل منها ٢٠ راكباً ، حـ ٢٥ راكباً ، د ٣٠ راكباً ، هـ ٤٠ راكباً ؛ وفق الجدول التالي :

مثِّل هذه البيانات بواسطة القطاعات الدائريَّة.

المجموعة	أ	ب	حـ	د	هـ	المجموع
عدد السيارات (التكرار)	١٢	٨	٤	٧	٥	٣٦

الحـــــــــل :

١ – نرسم، أولاً، دائرة ذات نصف قطر مناسب، وليكن في هذه الحالة ٣ سم.

٢ ـ نحسب زاوية القطاع لكل مجموعة من السيارات كما يلي :

زاوية قطاع أ = $\frac{١٢}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ١٢٠°

زاوية قطاع ب = $\frac{٨}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ٨٠°

زاوية قطاع جـ = $\frac{٤}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ٤٠°

زاوية قطاع د = $\frac{٧}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ٧٠°

زاوية قطاع هـ = $\frac{٥}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ٥٠°

٣ ـ نرسم القطاعات السابقة على الدائرة باستخدام المنقلة ونظلِّل كلاًّ منها بتظليل يُميِّزها عن بقية القطاعات كما في الشكل (٨ – ٩).



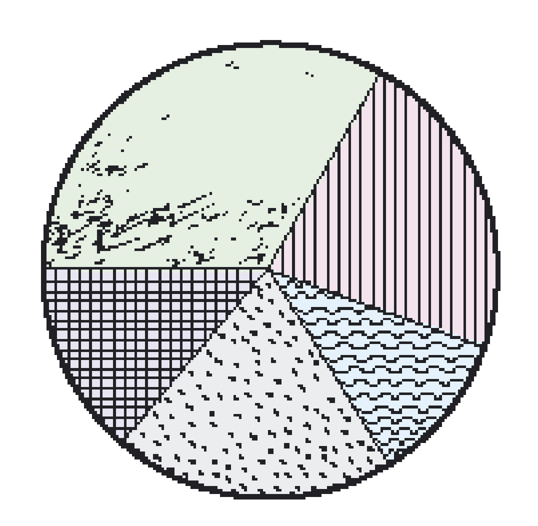
مجموعة أ

مجموعة ب

مجموعة جـ

مجموعة د

مجموعة هـ



شكل (٨ – ٩) : القطاعات الدائرية لمجموعات السيارات حسب أعداد الركاب.

تـــمـــاريـــن (٨ ــ ٢)

تمارين (٨ – ٢)

(١) إذا كانت الحالة الاجتماعية لعيِّنة مكوَّنة من ثلاثين شخصاً من إحدى القرى كما يلي :

متزوج	أرمل	مطلق	متزوج	أرمل
لم يتزوج	مطلق	متزوج	أرمل	متزوج
متزوج	أرمل	متزوج	متزوج	لم يتزوج
أرمل	أرمل	متزوج	لم يتزوج	متزوج
لم يتزوج	مطلق	لم يتزوج	مطلق	متزوج
متزوج	لم يتزوج	مطلق	لم يتزوج	لم يتزوج

فأجب عما يلي :

(أ) أوجد الجدول التكراري لهذه البيانات.

(ب) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي.

(جـ) ارسم الأعمدة البيانية للبيانات السابقة.

(د) استخدم القطاعات الدائرية لتمثيل هذه البيانات.

(٢) إذا كانت البيانات الناتجة من دراسة الدخل الشهري بالريال لعيِّنة مكوَّنة من ٣٠ أسرة من أحد المجتمعات كما يلي :

٢١٠٠	٣٥٠٠	٢٩١٠	٢٤٠٠	٥٥١٠	٦٧٠٠
٤٢٠٠	٤٦٠٠	٦٩٠٠	٢٠١٠	٣٩٥٠	٢٨١٤
٣٦٢٠	٥٦٠٠	٦٧٢٠	٥٢٢٠	٤٦١٠	٢٨٠٠
٦٢٠٠	٤٥٢٠	٣٧٨٠	٣٣٣٢	٦٩٩٠	٢٣٩٠
٣٩٠٠	٥٧٠٠	٥٤٨٣	٢٤٥٠	٦٧٣٠	٤٦٥٩

فأجب على الأسئلة التالية :

(أ) أوجد الجدول التكراري .

(ب) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي.

(ﺟ) ارسم المضلع التكراري.

(د) ارسم المنحني المتجمع الصاعد .

(٣) إذا كانت أعداد الطلاب في الصف الأول الثانوي وفي ٥٠ فصلاً من عدة مدارس ثانوية كما في الجدول التالي :

٣١	٢٠	١١	٤٠	٣٢	١٥	٢٦	١٧	٢٨	١٣
٣٥	١٢	١٦	٢١	١٢	١٨	١٧	٢٧	١٨	٣٩
٢٤	٢١	٢٤	٢٣	٣٧	٣٨	٢٦	٢٨	٢٩	٣٢
٣٦	٢١	١٧	٢٩	١١	٣٤	١٨	٣٦	٢٢	١٩
١٩	٢٢	١٩	٢٩	١٤	٣٤	١٩	١٧	٢٤	٢٥

فأجب عما يلي :

(أ) أوجد الجدول التكراري .

(ب) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي .

(ﺟ) ارسم الأعمدة التكرارية.

(٤) أطوال عيِّنة من طلاب مدارس المرحلة الابتدائية بالسنتيمتر هي كما يلي :

٩٨	١١٠	١٢٥	٩٢	٩١	١٢٥	١١٧	١٠١
١٠٤	١٢١	١٢٢	١٢٩	١٠٩	١١١	١٢٥	١١٨
١٢١	١٢٩	١٠٢	١٠٣	٩١	١٢٢	١٢٦	٩٩
٩٣	١٢٥	٩٥	١٢٧	٩٧	٩٩	٩٨	٩٣
١٠٤	١٠٨	١٠٢	١١٨	١١٤	١٠٧	١١٣	١٠٩
١١٥	١٠٧	١٠٧	١١٤	٩٤	١٠٥	٩٧	١١٧

والمطلوب :

(أ) أوجد الجدول التكراري لهذه البيانات .

(ب) ارسم المدرّج التكراري .

(جـ) ارسم المضلع التكراري والمنحني التكراري .

(د) ارسم المنحني المتجمِّع الصاعد .

(هـ) ارسم المنحني المتجمِّع النازل .

(٥) إذا كانت أعداد الفصول الدراسية في المرحلة الثانوية وفي ثلاث مناطق تعليمية أ ، ب ، جـ كما يلي :

المنطقة \ الفصل	أول ثانوي	ثاني ثانوي	ثالث ثانوي
منطقة تعليمية أ	٢٤	١٨	١٨
منطقة تعليمية ب	١٥	١٢	٩
منطقة تعليمية جـ	١٠	٨	٨

فأجب عما يلي :

(أ) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي لكل منطقة .

(ب) أوجد الجدول التكراري والنسبي للمناطقة التعليمية الثلاث مجتمعة.

(جـ) علِّق على نتائج الجداول التكرارية النسبية للمناطق الثلاث .

(د) استخدم القطاعات الدائرية لتمثيل أعداد الطلاب في الفصول الثلاثة.

(٦) يمثِّل الجدول التالي أوزان عيِّنة مكوَّنة من ٥٠ جندياً في إحدى القطاعات العسكرية بمنطقة ما بالكيلوغرام.

الفئة (الوزن)	٥٠ –	٦٠ –	٧٠ –	٨٠ –	٩٠ –
عدد الجنـود	٦	٢٠	١٠	٨	٦

والمطلوب :

(أ) نسبة الجنود الذين أوزانهم ٨٠ كلغ فأكثر .

(ب) نسبة الجنود الذين تقل أوزانهم عن ٦٠ كلغ .

(جـ) ارسم المدرَّج التكراري للأوزان.

(د) ارسم المنحني التكراري والمنحني التكراري المتجمِّع الصاعد للأوزان .

(٧) إذا كان الجدول التكراري التالي يمثِّل أعداد السيارات حسب الحمولة بالراكب التي عبرت إحدى المنافذ الحدودية والقاصدة مكة المكرمة في موسم الحج في المدَّة بين ٢٠ و ٣٠ ذي القعدة في أحد الأعوام .

الفئة (عدد الركاب)	٩–١٧	١٨–٢٦	٢٧–٣٥	٣٦–٤٤	٤٥–٥٤
عدد السيارات	١٢	٣٦	٤٠	٢٠	١٢

فأوجد ما يلي :

(أ) أوجد الجدول التكراري المتجمِّع الصاعد.

(ب) أوجد الجدول التكراري المتجمِّع النازل .

(جـ) ارسم المدرج التكراري لهذه البيانات.

(د) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي.

(هـ) أوجد عدد السيارات التي تحمل أكثر من ٢٦ راكباً ونسبتها المئوية.

(٨) الجدول التالي يبيِّن مساحة محيطات العالم بملايين الكيلومترات المربعة.

المحيط	الهادي	الأطلنطي	الهندي	القطبي الجنوبي	القطبي الشمالي
المساحة مليون كلم^2	١٨٣,٤	١٠٦,٧	٧٣,٨	١٩,٧	١٢,٤

مثِّل هذه المعلومات بيانياً مستخدماً ما يلي :

(أ) الأعمدة البيانية .

(ب) القطاعات الدائرية .

٨ - ٥ المتوسطات :

درسنا فيما سبق جمع البيانات وعرضها جدولياً وبيانياً. والآن ننتقل إلى المرحلة الرابعة من خطوات الدراسة الإحصائية، وهي التعبير عن الظاهرة محل الدراسة بمقياس معبِّر عن جميع قيم الظاهرة، مثل متوسط دخل الفرد في مجتمع ما، أو متوسط أعداد الطلاب في المدارس الثانوية ، أو متوسط كميات الأمطار (بالمليمتر) التي يمنُّ الله بها على عباده في إحدى مدن أو مناطق المملكة، أطوال أو أوزان أشخاص في منطقة ما ... إلخ.

ومن الملاحظ على هذه الظواهر، أنها بتقدير من الله عزّ وجل : ﴿ وَكُلُّ شَيْءٍ عِندَهُ بِمِقْدَارٍ ﴾ (الآية ٨ ـ سورة الرعد)، تميل إلى الالتفاف حول قيمة معينة ووسطى أي تتوسط القيم بصورة ما، خذ، على سبيل المثال، عينة من الطلبة في صف معين وادرس ظاهرة الطول لديهم، ستجد أن قلة منهم قصار جدًّا وقلة أخرى طوال جدًّا وأن غالبيتهم يميلون في أطوالهم إلى طول أوسط . ينطبق الأمر نفسه على ظاهرة الوزن والذكاء وحدة البصر .. تلك سنة الله في خلقه ولن تجد لسنته تبديلاً، قال تعالى : ﴿ فَقَدَرْنَا فَنِعْمَ الْقَادِرُونَ ﴾ (الآية ٢٣ ـ سورة المرسلات) .

وسندرس كيفية إيجاد مقياس لهذه الخاصية التي فطر الله عليها الظواهر الكونية

عن طريق عدة مقاييس ابتكرها الإحصائيون أهمَّها :

الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

ولكلٍّ من هذه المقاييس طريقة خاصة لحسابه أو استنتاجه كما أن لكل منها مزاياه وعيوبه والحالات التي يفضل استخدامه فيها .

أولاً : الوسـط الحسـابـي :

يُعتبر الوسط الحسابي من أكثر المتوسطات شيوعاً.

تعريـــف (٨ ـــ ٦) :

يُعرَّف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي لو حلّت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً لمجموع القيم الأصلية.

من ذلك نرى أنَّ الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم مقسوماً على عددها. ولحساب الوسط الحسابي نميّز بين حالتين هما حالة البيانات غير المبوَّبة (أي التي لم يتم وصفها في جداول تكرارية) وحالة البيانات المبوَّبة (أي التي تمَّ وصفها في جداول تكرارية) .

(أ) البيـانـات غير المبـوَّبـة :

إذا كان لدينا ﻫ قيمة عبارة عن أطوال أو أوزان أو أعمار مجموعة من الطلاب ولتكن هذه القيم هي :

$$س_1 ، س_2 ، .... س_ﻫ$$

عندئذٍ فإن تعريف الوسط الحسابي ينصُّ على أن :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

فإذا رمزنا للوسط الحسابي بالرمز $\bar{س}$ (وتُقرأ س فتحة) فإن قيمته حسب التعريف هي :

$$\bar{س} = \frac{س_١ + س_٢ + ... + س_ن}{ن}$$

للاختصار في التعبير عن $\bar{س}$ فإننا نستخدم الرمز $\sum$س (وتقرأ سيجما) ، وتكون الصيغة المبسَّطة للوسط الحسابي هي :

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

مثـــال (٨-٩) :

أوجد الوسط الحسابي لدرجات عشرة طلاب في مادة الرياضيات من البيانات التالية : ٨٢ ، ٦٩ ، ٧٧ ، ٥٨ ، ٧٥ ، ٩٠ ، ٦١ ، ٩٣ ، ٨٥ ، ٦٠

الحــــــــــل :

عدد الطلاب في هذه البيانات ن = ١٠

والقيم هي : $س_١$ = ٨٢ ، $س_٢$ = ٦٩ ، $س_٣$ = ٧٧

$س_٤$ = ٥٨ ، $س_٥$ = ٧٥ ، $س_٦$ = ٩٠ ، $س_٧$ = ٦١ ،

$س_٨$ = ٩٣ ، $س_٩$ = ٨٥ ، $س_{١٠}$ = ٦٠

وبالتالي فإن الوسط الحسابي هو :

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$= \frac{٨٢ + ٦٩ + ٥٨ + ٧٥ + ٩٠ + ٦١ + ٩٣ + ٨٥ + ٦٠}{١٠}$$

$$= \frac{٧٥٠}{١٠}$$

= ٧٥ درجة

(ب) البيـانـات المبـوَّبـة :

نلاحظ في المثال (٨ - ٩) السابق أنَّ طالباً واحداً حصل على ٨٢ درجة وطالباً آخر حصل على ٦٩ درجة. أما إذا كان عدد الطلاب كبيراً فمن الممكن أن يحصل أكثر من طالب على الدرجة نفسها. لتوضيح هذه الحالة نأخذ المثال التالي :

مـثـــال (٨-١٠) :

إذا كانت درجات ٣٠ طالباً في امتحان الفيزياء للشهر الأول من الدراسة في إحدى المدارس الثانوية حيث الدرجة العظمى ١٠ درجات كما في الجدول التالي :

الدرجـة	عدد الطلاب
٣	٥
٥	٧
٨	١٠
٩	٦
١٠	٢

فاحسب الوسط الحسابي

الحـــــــــل :

نلاحـظ أن ٥ طـلاب حصـل كـل منهم على ٣ درجات أي أنَّ مجموع درجاتهم ٣ × ٥ = ١٥ ، و٧ طـلاب حـصل كـل منهم عـلـى ٥ أي مجـمـوع درجـــاتهم ٥ × ٧ = ٣٥، ... وهكذا . ويكون الوسط الحسابي هو مجموع الدرجات التي نحصل عليها بهذه الطريقة مقسوماً على عدد الطلاب والذي يساوي ٥+٧+١٠+٦+٢= ٣٠.

ويمكن القول بأن الدرجة ٣ تكررت ٥ مرات والدرجة ٥ تكررت ٧ مرات ... وهكذا. فإذا رمزنا للدرجة بالرمز س ولعدد الطلاب الذين حصلوا عليها بالرمز ﻫ ، يمكننا الحصول على الجدول التالي :

الدرجة (س)	التكرار (ك)	الدرجة x التكرار (س ك)
٣	٥	٣ x ٥ = ١٥
٥	٧	٥ x ٧ = ٣٥
٨	١٠	٨ x ١٠ = ٨٠
٩	٦	٩ x ٦ = ٥٤
١٠	٢	١٠ x ٢ = ٢٠
المجموع	Σ ك = ٣٠	Σ س ك = ٢٠٤

من الجدول السابق نرى أنَّ :

Σ ك = ٣٠

Σ س ك = ٢٠٤

وبالتالي فإنَّ الوسط الحسابي هو :

$$\bar{س} = \frac{٢٠٤}{٣٠}$$

= ٦,٨ درجة

وتكون صيغة الوسط الحسابي هي :

$$\bar{س} = \frac{\Sigma \text{ س ك}}{\Sigma \text{ ك}}$$

مثـــال (٨-١١) :

أوجد الوسط الحسابي لأجور العمال في المثال (٨ - ٣) مستخدماً الجدول (٨ - ١٣).

الحــــــل :

لإيجاد الوسط الحسابي نتَّبع ما يلي :

(١) نجد جدولاً تكرارياً يحتوي العمود الأول منه على مراكز الفئات س والعمود الثاني على التكرارات المناظرة لها ك .

(٢) نضرب مراكز الفئات س في التكرارات المناظرة ك فنحصل على قيم س ك ونضعها في العمود الثالث .

٣ ـ نجد قيمة Σ ك وقيمة Σ س ك

٤ ـ يكون الوسط الحسابي هو :

$$\bar{\text{س}} = \frac{\Sigma\ \text{س ك}}{\Sigma\ \text{ك}}$$

مراكز الفئات س	التكرار (ك)	س ك
٥٥	٨	٤٤٠
٦٥	١٢	٧٨٠
٧٥	١٤	١٠٥٠
٨٥	٢٤	٢٠٤٠
٩٥	٨	٧٦٠
١٠٥	٨	٨٤٠
١١٥	٦	٦٩٠
المجمـوع	**٨٠**	**٦٦٠٠**

من الجدول السابق نجد أن :

$$\bar{\text{س}} = \frac{\Sigma\ \text{س ك}}{\Sigma\ \text{ك}}$$

$$= \frac{\text{٦٦٠٠}}{\text{٨٠}}$$

= ٥ , ٨٢ ريالاً.

مزايا الوسط الحسابي :

(أ) يأخذ جميع القيم في الاعتبار .

(ب) شائع الاستعمال وكذا يمكن الاستدلال به في كثير من الدراسات الإحصائية.

(جـ) لا يحتاج في حسابه إلى ترتيب البيانات بصورة معينة.

عيوب الوسط الحسابي :

(أ) يتأثر بالقيم المتطرِّفة (الشاذة) من حيث الكبر والصغر.

(ب) لايمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية.

(جـ) قد لا يساوي أيًّا من القيم الداخلة في حسابه فقد يحتوي على جزء كسري لبيانات مكوّنة من أعداد صحيحة.

ثانياً : الوسيط :

تعريف (٨ ــ ٧) :

الوسيط هو القيمة العددية التي تقسم البيانات إلى مجموعتين متساويتين بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً.

من هذا التعريف، نلاحظ أنَّ عدد القيم الأصغر من الوسيط يساوي عدد القيم الأكبر منه.

سندرس فيما يلي طريقة حساب الوسيط للبيانات غير المبوَّبة ومن ثم للبيانات المبوّبة.

(أ) البيانات غير المبوَّبة :

حسب تعريف الوسيط ، نرتب القراءات المعطاة إما تصاعدياً أو تنازلياً. وتكون القيمة التي تقع في المنتصف هي الوسيط. ففي حالة كون عدد القراءات فردياً فإن الوسيط هي القراءة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$. أما إذا كان عدد القراءات زوجياً فإن

الوسيط هو الوسط الحسابي للقراءتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ +١ .

مـثــال (٨-١٢) :

أوجد الوسيط لأوزان لاعبي كرة القدم الأساسيين لمنتخب إحدى الدول إذا كانت أوزانهم هي : ٦٢ ، ٥٠ ، ٦٣ ، ٥٥ ، ٤٨، ٥٣ ، ٥١ ، ٥٧ ، ٦٧ ، ٥٨ ، ٦٤.

الحــــــل :

نرتِّب أولاً الأوزان تصاعدياً مثلاً كالتالي :

٤٨ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٣ ، ٥٥ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٧

نلاحظ أنَّ الرقم الذي ترتيبه $\frac{١١ + ١}{٢}$ = ٦ هو ٥٧ ، وبذلك يكون :

الوسيط = ٥٧

مثـال (٨-١٣) :

أوجـد الوسيـط لدرجـات الطلاب في مادة الرياضيات والمعطاة في المثال (٨-٩) : وهي : ٨٢ ، ٦٩، ٧٧، ٥٨، ٧٥، ٩٠ ، ٦١، ٩٣، ٨٥ ، ٦٠.

الحــــــل :

نرتِّب الدرجات تصاعدياً كما يلي :

٥٨ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٩ ، ٧٥ ، ٧٧ ، ٨٢ ، ٨٥ ، ٩٠ ، ٩٣ .

عدد الطلاب ن = ١٠ وهو عدد زوجي .

وبالتالي فإننا نبحث في القيم المرتَّبة عن العددين اللذين ترتيبهما $\frac{١٠}{٢}$ أي ٥ وَ $\frac{١٠}{٢}$ + ١ أي ٦ . وبذلك يكون الوسيط هو متوسط العددين ٧٥ ، ٧٧ أي أنَّ :

الوسيط = $\frac{٧٥ + ٧٧}{٢}$

= ٧٦ درجة

(ب) البيـانـات المبـوَّبـة :

نستطيع حساب الوسيط للبيانات المبوَّبة بطريقتين إما حسابياً أو بيانياً (أي بطريقة الرسم) .

الطريقـة الحسـابيـة :

تتلخص طريقة حساب الوسيط في الخطوات التالية :

(١) نجد الجدول المتجمِّع الصاعد للبيانات من الجدول التكراري وبذلك أوجدنا ما يكافيء ترتيب القراءات تصاعدياً.

(٢) ترتيب الوسيط عبارة عن منتصف مجموع التكرارات أي أنَّ :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\sum \text{ك}}{٢}$$

(٣) تسمَّى الفئة التي تحتوي على الوسيط بالفئة الوسيطية. وبذلك يمكن حساب الوسيط من العلاقة التالية :

$$\text{الوسيط} = \text{أ} + \frac{\frac{١}{٢}\sum \text{ك} - \text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٢} - \text{ك}_{١}} \times \text{ل}$$

حيث أن أ هو الحد الأدنى للفئة الوسيطية .

$\text{ك}_{١}$ هو التكرار المتجمع المناظر للحد الأدنى للفئة الوسيطية.

$\text{ك}_{٢}$ هو التكرار المتجمع المناظر للحد الأعلى للفئة الوسيطية.

ل هو طول الفئة الوسيطية.

أي أنَّ قيمة الوسيط تبعد عن بداية الفئة الوسيطية بمقدار يتناسب مع نسبة التكرارات المتبقِّية لإكمال ترتيب الوسيط وتكرار الفئة الوسيطية.

ولتوضيح الطريقة نورد المثال التالي :

مـثـــال (٨-١٤) :

أوجد قيمة الوسيط لبيانات أجور العمال المعطاة في الجدول المتجمِّع الصاعد (٨-١١).

الحـــــــــل :

لاحظ أنَّ ترتيب الوسيط $= \frac{\sum ت}{٢}$

$= \frac{٨٠}{٢}$

$= ٤٠$

الجدول (٨-١١) المتجمِّع الصاعد هو :

الحدود العليا للفئات	التكـرارات
أقل من ٦٠	٨
أقل من ٧٠	٢٠
أقل من ٨٠	٣٤ ← $ت_١$
	← الوسيط
أقل من ٩٠	٥٨ ← $ت_٢$
أقل من ١٠٠	٦٦
أقل من ١١٠	٧٤
أقل من ١٢٠	٨٠

يـقـع ترتيب الـوسيط، أي ٤٠، بيـن التكـرارين المتجمِّعيـن ٣٤ وَ ٥٨ أي أنَّ

$ت_١$ = ٣٤ ، $ت_٢$ = ٥٨ .

نلاحظ كذلك بأنَّ :

ا = ٨٠ ، ل = ٩٠ − ٨٠ = ١٠

ومن ذلك يمكن حساب الوسيط مباشرة كما يلي .

$$\text{الوسيط} = أ + \frac{\frac{1}{2}\text{مج ك} - ك_{1}}{ك_{2} - ك_{1}} \times ل$$

$$= ٨٠ + \frac{٤٠ - ٣٤}{٥٨ - ٣٤} \times ١٠$$

$$= ٨٠ + \frac{٦}{٢٤} \times ١٠$$

$$= ٨٠ + ٢,٥$$

$$= ٨٢,٥$$

الطريقـة البيانيـة :

وتتلخَّص طريقة حساب قيمة الوسيط بالطريقة البيانية :

(أو الرسم) فيما يلي :

(١) نكوِّن الجدول المتجمِّع الصاعد كما سبق أن أوضحنا في البند (٨ – ٣).

(٢) نرسم المنحني المتجمِّع الصاعد كما سبق أن أوضحنا في البند (٨ – ٤).

(٣) نوجد ترتيب الوسيط، كما في البيانات المبوّبة، وهي $\frac{\text{مج ك}}{٢}$. ومن هذه النقطة نرسم مستقيماً موازياً للمحور الأفقي حتى يلتقي مع المنحني المتجمِّع الصاعد. ننزل من نقطة التلاقي عموداً على محور الحدود العليا للفئات فتكون قيمة الوسيط هي نقطة تقاطع ذلك العمود مع المحور الأفقي.

مـثـــال (٨-١٥) :

أوجد قيمة الوسيط بالطريقة البيانية مستخدماً بيانات الجدول التكراري المتجمع الصاعد (٨-١١).

الحـــــــــل :

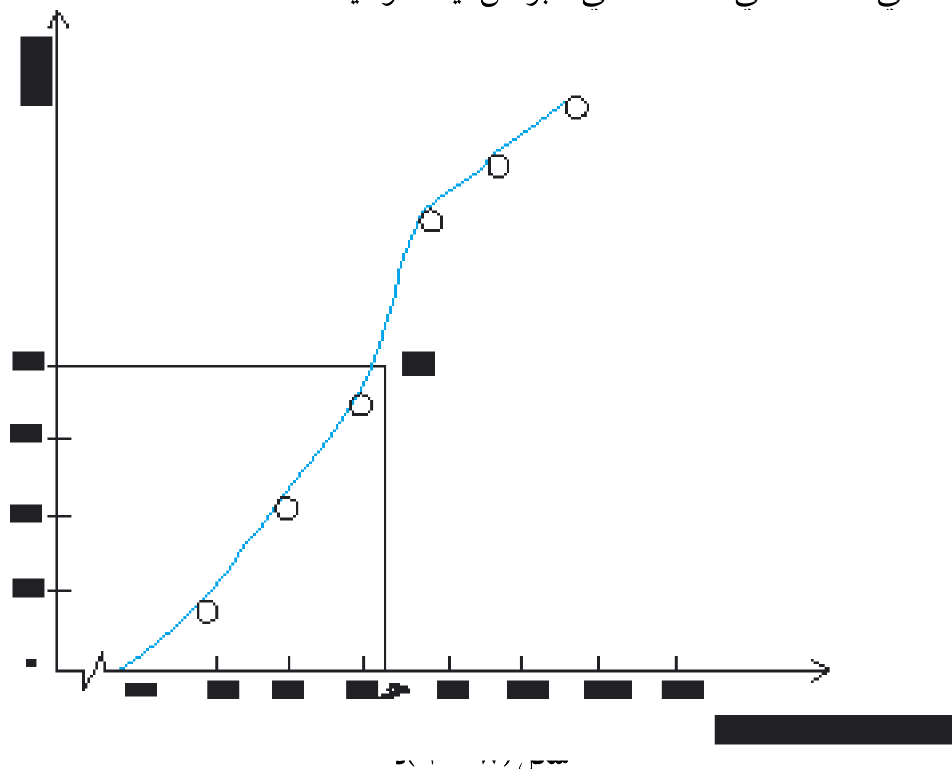
نلاحظ أن :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{مج ك}{٢}$$

$$= \frac{٨٠}{٢}$$

$$= ٤٠$$

نرسم المنحني المتجمِّع الصاعد، بالطريقة التي سبق شرحها، كما في الشكل التالي. نرسم مستقيماً من النقطة ٤٠ على محور الصادات ليلتقي مع المنحني المتجمِّع الصاعد في نقطة ب . ننزل عموداً من نقطة ب على محور الفئات (المحور الأفقي) فتقطعه في نقطة هـ التي تعبِّر عن قيمة الوسيط .



لاحظ أنَّ قيمة الوسيط أو الإحداثي الأفقي لنقطة ـ تساوي ٨٢,٥ تقريباً . وقد تختلف قيمة الوسيط عند حسابه بالطريقة البيانية عن حسابه بالعلاقة الرياضية ويرجع مثل هذا الاختلاف ، إن وجد ، إلى مقدار التقريب في الرسم .

مـزايـا الوسـيـط :

(١) لا يتأثر بالقيم الشاذة (الكبيرة جدًّا أو الصغيرة جدًّا) لأنه من المتوسطات الموضعية .

(٢) يمكن حسابه للبيانات الوصفية التي لها صفة الترتيب .

عـيـوب الـوسـيـط :

(١) لا يأخذ جميع القراءات في الاعتبار عند حسابه .

(٢) يصعب الاستدلال به منفرداً في الدراسات الإحصائية .

ثـالـثـاً : المـنــوال :

تعريــــف (٨ ــــ ٨) :

المنوال لمجموعة قراءات هو القراءة الأكثر تكراراً أو شيوعاً .

سنعرض كيفية إيجاده في حالتي البيانات غير المبوَّبة والبيانات المبوَّبة.

(أ) البيـانات غيـر المبـوَّبـة :

تعتبر البيانات المبوَّبة وحيدة المنوال إذا تكررت إحدى قراءاتها أكثر من أي قراءة أخرى . كما تعتبر البيانات ثنائية المنوال إذا وجدنا في البيانات قراءتين لهما نفس التكرار، وتكرارهما أكبر من تكرار أي قراءة أخرى، وتعتبر البيانات متعددة المناويل إذا زادت القراءات التي لها التكرار نفسه عن قراءتين وكان ذلك التكرار أكبر من تكرار بقية القراءات. أما إذا لم توجد أية قراءة تتكرر أكثر من غيرها فنقول بأن هذه البيانات عديمة المنوال أو لا منوال لها .

مـثـــال (٨-١٦) :

أوجد المنوال لأعمار عيِّنة مكوَّنة من ١٠ طلاب من إحدى المدارس الثانوية إذا كانت بياناتها كالتالي :

١٨ ، ١٦ ، ١٩ ، ١٧ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٧، ٢٠، ١٨، ١٥

الحـــــــــــل :

نلاحظ بأنَّ العدد ١٨ في العينة قد تكرَّر ٣ مرَّات وهو أكثر تكراراً من أي عدد آخر أي أنَّ :

المنوال = ١٨

مـثـــال (٨-١٧) :

أوجد المنوال لعينة من الأسر إذا كان الدخل الشهري لكلٍّ منها بالريال كما يلي :

٧٣٤٠ ، ٩٥٠٠ ، ٦٣٢٠ ، ٢٤٧٠ ، ٧٥٨٠ ، ١٦٨٠٠ ، ٩٦٠٠ ، ٤٥٣٠ ، ٥٦١٢ ، ٢٦١٩ ، ١٨٥٠ ، ٦٤٥٥.

الحـــــــــــل :

نلاحظ أنّ كل قراءة من القراءات السابقة تظهر مرة واحدة (أي غير مكرَّرة) وبالتالي فإن البيانات لا منوال لها .

مـثـــال (٨-١٨) :

إذا كانت أعمال طلاب الصف الثاني الابتدائي في إحدى المدارس هي :

٧ ، ٦ ، ٨ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٨ ، ٧ ، ٧ ، ٨ ، ٨ ، ٧، ٨ ، ٩ ، ٨ ، ٩ ، ٨ ، ٧.

فناقش وجود المنوال من عدمه .

الحـــــــــــل :

نلاحظ أن القراءة ٨ تكرَّرت ٨ مرَّات .

وأن القراءة ٧ تكرَّرت ٨ مرَّات .

أمَّا القراءات الأخرى ٦ ، ٩ فلم يصل تكرارها إلى ٨ وبالتالي فإن البيانات ثنائية المنوال، ومنوالاها هما ٧ ، ٨ .

(ب) البيـانـات المبـوَّبــة :

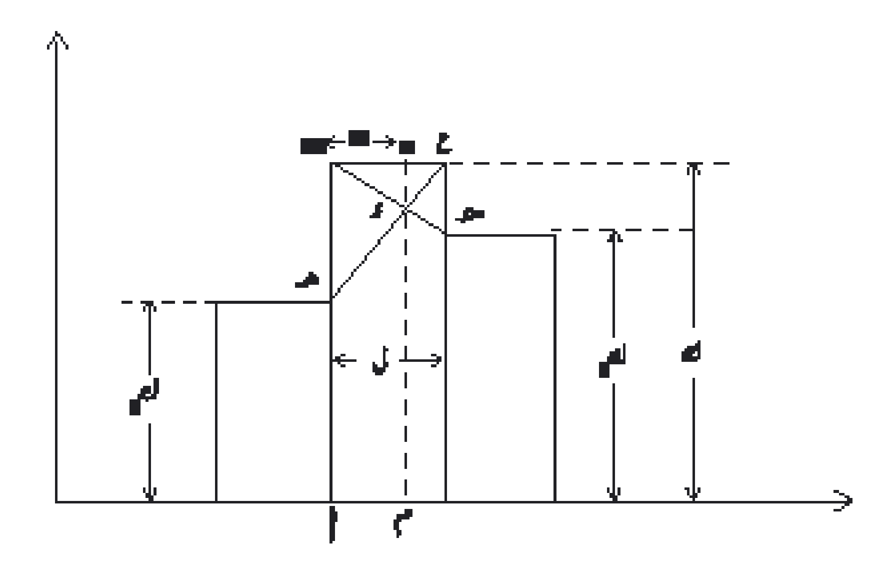
يمكن إيجاد المنوال ، في حالة البيانات المبوَّبة، بطريقتين حسابية وبيانيَّة.

الطريقـة الحسـابـيـة :

يمكن استنتاج حساب المنوال كما يلي :

(١) نرسم من المدرَّج التكراري الخاص بالفئة المنوالية، (الفئة المناظرة لأكبر تكرار) وللفئتين السابقة واللاحقة لها كما في الشكل (٨ – ١١) .

شكل (٨ – ١١) : رسم الفئة المنوالية



(٢) من تشابه المثلثين ب ع هـ ، ر ع د نجد أن :

[illegible]

ومن تشابه المثلثين ب [illegible] [illegible]، ب [illegible] [illegible] نجد أنَّ :

$$\frac{|ب\ [illegible]|}{} = \frac{|[illegible]\ [illegible]|}{}$$

بقسمة العلاقة الثانية على العلاقة الأولى نجد أنَّ :

$$\frac{|ب\ [illegible]|}{} = \frac{|ب\ [illegible]|}{}$$

أي أنَّ : $\frac{ف}{ل - ف} = \frac{[illegible] - [illegible]_1}{[illegible] - [illegible]}$

وإضافة بسط كل نسبة إلى مقامها نحصل على :

$$\frac{ف}{ل} = \frac{[illegible] - [illegible]_1}{2\,[illegible] - [illegible]_1 - [illegible]_2}$$

أي أنَّ : $ف = \frac{[illegible] - [illegible]_1}{2\,[illegible] - [illegible]_1 - [illegible]_2} \times ل$

حيث ف هو الفرق بين المنوال وبداية الحد الأدنى للفئة المنوالية.

ومن ذلك نجد أنَّ :

المنوال = [illegible] + ف

أو

المنوال = [illegible] + $\frac{[illegible] - [illegible]_1}{2\,[illegible] - [illegible]_1 - [illegible]_2} \times ل$

حيث إنَّ : [illegible] بداية (الحد الأدنى) للفئة المنوالية.

[illegible] تكرار الفئة المنوالية .

$[illegible]_1$ تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية .

$[illegible]_2$ تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية.

ل طول الفئة المنوالية.

مثـــال (٨-١٩) :

أوجد قيمة المنوال للجدول التكراري التالي والذي يبيِّن كميات الأمطار النازلة على منطقة ما بالمليمتر وفي ٦٠ شهراً .

كمية الأمطار	٠–	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –
عدد الأشهر	٩	١٣	٢١	٩	٦	٢

الحـــــــــل :

نلاحظ أن الفئة المنوالية هي الفئة التي حدُّها الأدنى أ = ٢٠ وذلك لأن لها أكبر تكرار ك = ٢١ .

ومن الجدول نجد أن $ك_١$ = ١٣ ، $ك_٢$ = ٩ ، ل = ١٠

وبالتعويض في العلاقة :

$$\text{المنوال} = أ + \frac{ك - ك_١}{٢ك - ك_١ - ك_٢} \times ل$$

نجد أنَّ :

$$\text{المنوال} = ٢٠ + \frac{٢١ - ١٣}{٢ \times ٢١ - ١٣ - ٩} \times ١٠$$

= ٢٠ + ٤

= ٢٤ مليمتراً

طـريقـة الـرســم :

نستخدم الشكل (٨-١١) السابق لتوضيح طريقة الرسم والذي اتبعنا في إيجاده ما يلي :

(١) رسمنا المستطيلات من المدرج التكراري المناظرة للفئة المنوالية والفئتين المجاورتين لها .

(٢) وصلنا [▪ هـ] ، [ب هـ] وكانت نقطة تقاطعهما ء .

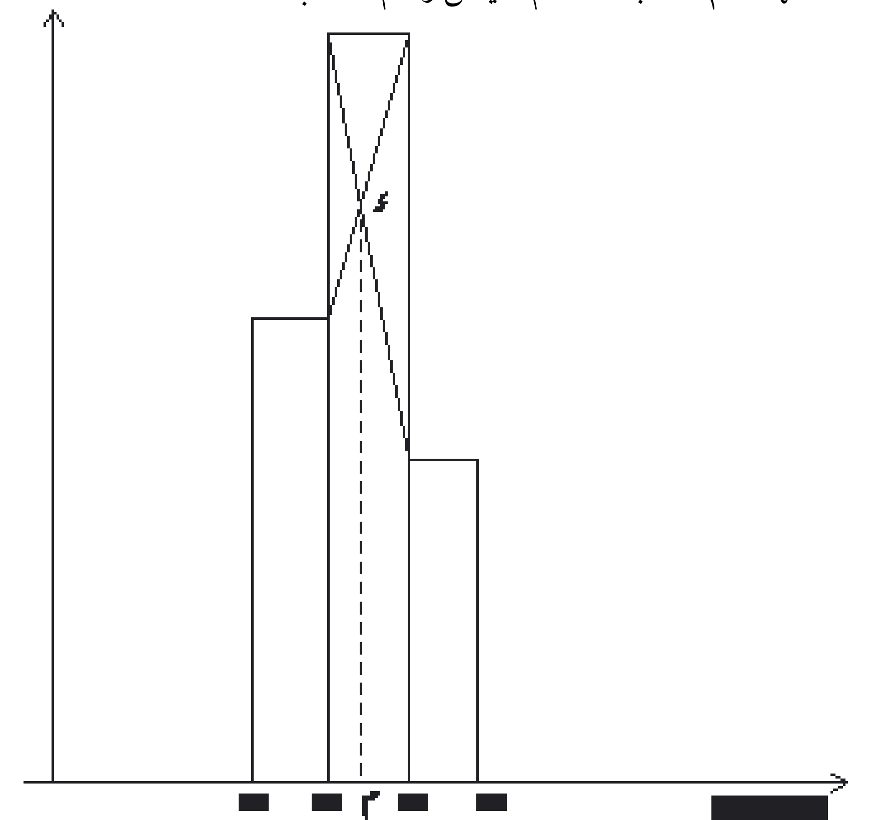
(٣) أنزلنا عموداً من نقطة ء على محور الفئات (الأفقي) فالتقى معه في النقطة م وهي المنوال .

مثال (٨-٢٠) :

أوجد المنوال بطريقة الرسم لبيانات كميات الأمطار في المثال (٨ – ١٩) .

الحل :

نرسم ثلاثة مستطيلات للفئة المنوالية التي تكرارها ك = ٢١ وللفئتين المجاورتين لها حيث إنَّ تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية $هـ_١$ = ١٣ وتكرار الفئة اللَّاحقة لها $هـ_٢$ = ٩ باستخدام مقياس رسم مناسب .



نصل الركن الأعلى الأيمن من المستطيل للفئة السابقة مع الركن الأعلى الأيمن لمستطيل الفئة المنوالية. كذلك نصل الركن الأعلى الأيسر من مستطيل الفئة اللّاحقة مع الركن الأعلى الأيسر من مستطيل الفئة المنوالية. من تقاطع المستقيمين الواصلين بين الأركان ء ننزل عموداً على محور الفئات فيقابله في المنوال م حيث وجدنا أنَّ :

المنوال = ٢٤ مليمتراً

(ومعلوم أنَّ الفرق بين قيمتي المنوال ـ إن وجد ـ في الطريقتين يكون ناتجاً من عدم دقَّة الرسم) .

مـزايـا المـنـوال :

(١) لا يتأثَّر بالقيم المتطرَّفة (الشاذَّة) نحو الكبر أو نحو الصغر .

(٢) يمكن حسابه للبيانات الوصفيَّة.

(٣) يمكن حسابه للبيانات المفتوحة أي التي لم يعرف الحد الأدنى للفئة الأولى أو الحد الأعلى للفئة الأخيرة.

عـيـوب المـنـوال :

(١) لا يأخذ في حسابه جميع القيم.

(٢) قد يكون للبيانات أكثر من منوال وبالتالي لا معنى لإيراده في بعض الدراسات الإحصائية.

تــمـــاريـــن (٨ ــ ٣)

(١) عرّف كلاً من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .
ولماذا تسمّى هذه المقاييس بالمتوسطات.

(٢) اذكر مزايا وعيوب كلٍّ من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

(٣) (أ) إذا كان استهلاك عشرة منازل من الكهرباء بمئات كيلو وات هي :

٩,٢ ، ٨,٤ ، ١٢,٤ ، ٨,٤ ، ٧,٤ ، ١٣,٢ ، ١٢ ، ٦,٤ ، ٦ ، ٥,٦ ، ١٧

فأوجد الوسط الحسابي للاستهلاك.

(ب) اطرح من القراءات السابقة الرقم ٤,٤ تحصل على :

٨,٤ ، ٤ ، ٨ ، ٤,٣ ، ٨,٨ ، ٦,٧ ، ٢ ، ٢,١ ، ٦,١٢

ثم أوجد الوسط الحسابي. ماذا تلاحظ ؟

(جـ) اقسم القراءات المعطاة في الفقرة (أ) على العدد ٤ تحصل على :

٢,٣ ، ١ ، ٢,١ ، ٣,١ ، ٢,١ ، ١,٨٥ ، ٣,٣ ، ٣ ، ٦,١ ، ٤,١ ، ٢٥ ، ٤,٢٥

ثم أوجد الوسط الحسابي لهذه البيانات . ماذا تلاحظ ؟

(د) هل الوسط الحسابي في الحالات الثلاث ينطبق في قيمته مع إحدى القراءات ؟

(٤) أخذت عيَّنة مكوَّنة من ٢٠٠ طالب من مدارس تحفيظ القرآن الكريم وصُنِّفت نتيجة الأجزاء العشرة الأخيرة التي يحفظها الطلبة من القرآن الكريم كما في الجدول التالي :

عدد الأجـزاء	١	٢	٣	٤	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الطلاب	١٢	١٩	٣٥	٥٠	٣٢	١٦	١٢	١٣	١١

أوجد ما يلي :

(أ) الوسط الحسابي لعدد الأجزاء التي يحفظها الطلاب .

(ب) الوسيط لعدد الأجزاء .

(جـ) المنوال لعدد الأجزاء .

(٥) إذا كانت أبعاد الطرق بالكيلومتر بين مكة المكرمة وعدد من المدن الأخرى في المملكة العربية السعودية هي كما يلي :

المدينة	الرياض	الطائف	المدينة المنورة	الدمام	بريدة	تبوك	جـدة	طريف
المسافة	٩٨٩	٨٨	٤٤٢	١٤٥٦	٩١٥	١١٣٣	٧٢	٢٧٢٢
المدينة	نجران	أبهـا	الخبـر	حائل	الخرج	العلا	عنيزة	عـرعـر
المسافة	٨٩٨	٦٠٦	١٤٥٢	٨٩٤	١٠٦٩	٨٢٢	٩٦٨	٢٤٨٤

فأوجد ما يلي :

(أ) الوسط الحسابي لمسافة الطرق بين هذه المدن ومكة المكرّمة.

(ب) الوسيط لمسافة الطرق بين هذه المدن ومكة المكرّمة.

(حـ) هل يوجد منوال لمسافات الطرق بين هذه المدن ومكة المكرَّمة؟

(٦) إذا كانت بيانات مبيعات مطعم المدرسة في ٢٥ يوماً كما يلي :

علب العصير	٢٣٠	٤٢٠	٤٦٠	٥٤٠	٥٥٠
الأيـــــام	٣	٤	٨	٥	٥

الدخل بالريال	٨٥٠	١٤٠٠	١٤٢٠	١٥٠٠
الأيـــــام	٥	٨	٩	٣

فاكتب تقريراً مختصراً للمعلم المشرف على المطعم مستخدماً المتوسطات التي درستها .

(٧) إذا علمت أن مجموع رواتب موظفي أحد الأقسام في إحدى المصالح الحكومية ٥٧١٢٠٠ ريالاً وكان متوسط راتب الموظف في هذا القسم هو ٥٦٠٠ ريال . فأوجد عدد الأفراد العاملين بهذا القسم .

(٨) أجرت إحدى شركات صناعة الملابس دراسة لأطوال عيِّنة مكوَّنة من ١٠٠ شخص أختيرت بطريقة مناسبة من إحدى القرى فكانت النتائج كما يلي :

الطول بالسنتيمتر	١٣٠ –	١٤٠ –	١٥٠ –	١٦٠ –
عدد الأشخاص	٢٠	٣٦	٢٤	٢٠

أوجد ما يلي :

(أ) الوسط الحسابي لأطوال الأشخاص.

(ب) الوسيط مستخدماً الطريقتين الحسابية والبيانية وقارن بينهما.

(جـ) المنوال بالطريقتين الحسابية والبيانية وقارن بينهما.

(٩) في إحدى الدراسات الإحصائية عن الواردات اليومية لإحدى الدول بملايين الريالات السعودية كانت النتائج التالية :

الوسيط = ٨٠ ، مجموع التكرارات للأيام التي استورد فيها = ٣٦٠

التكرار المتجمِّع المناظر للحد الأدنى للفئة الوسيطية = ١٢٥ ،

التكرار المتجمِّع المناظر للحد الأعلى للفئة الوسيطية = ١٩٥ ،

بداية الفئة الوسيطية = ٧٦ .

أوجد طول الفئة الوسيطية .

٨ - ٦ الانحراف المعياري :

درسنا في البند السابق المتوسطات أو مقاييس النزعة المركزية. ومما يمكن ملاحظته على هذه المقاييس أنها لا تعطي فكرة كاملة عن خصائص التوزيعات التكرارية، وبالأخص لا توضح لنا مدى تجانُس القراءات أي تباعدها، أو تقاربها عن أحد مقاييس النزعة المركزية. لتوضيح ذلك ليكن لدينا مجموعتان من البيانات.

المجموعة الأولى : ١٤ ، ١٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٠

المجموعة الثانية : ٧ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٤٢ ، ١

نلاحظ أنَّ الوسط الحسابي للمجموعة الأولى ١٦ وكذلك الوسط الحسابي للمجموعة الثانية ١٦ ولكن قراءات المجموعة الأولى متقاربة أو متجانسة، تقع بين ١٢ ، ٢٠ بينما قراءات المجموعة الثانية متباعدة أي غير متجانسة وتقع قيم قراءاتها بين ١ ، ٤٢ .

وبالمثل يمكن ملاحظة أن للمجموعتين المرتَّبتين تصاعدياً التاليتين :

المجموعة أ : ١٠ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٠

المجموعة ب : ١ ، ٣ ، ١٧ ، ٣٥ ، ٩٠

الوسيط نفسه ١٧ بينما تتجانس قراءات المجموعة أ وتتباعد قراءات المجموعة ب.

من ذلك نلاحظ أنَّه لايمكن إجراء مقارنة متكاملة بين ظاهرتين من معرفة وسطيهما الحسابيين أو وسيطيهما، فقد تكون مفردات إحدى الظاهرتين متقاربة ومتجانسة بينما تكون مفردات الظاهرة الأخرى متباعدة عن بعضها البعض أي أكثر تشتُّتاً، لذلك سندرس في هذا البند أحد أهم المقاييس التي تحدِّد مدى تباعد أو تقارب قراءات الظاهرة عن وسطها الحسابي، أي مدى تشُتت هذه القراءات وهو (الانحراف المعياري) وهو من أكثر مقاييس التشتُّت استخداماً .

ونقدِّم لك فيما يلي مفهوم الانحراف المعياري وطريقة حسابه في حالتي البيانات غير المبوَّبة والبيانات المبوَّبة .

البيـانـات غيـر المبـوَّبـة :

إذا كانت لديـنا ن من القـراءات وهي $س_١$، $س_٢$ ، .... $س_ن$ ، ووسطها الحسابي $\bar{س}$ ، تكون هذه القراءات متقاربة من بعضها إذا كانت قريبة من وسطها الحسابي $\bar{س}$، أي إذا كانت انحرافاتها عن $\bar{س}$ صغيرة. وبالتالي فإنَّه يمكن استخدام انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي كمقياس للتشتُّت . ويمكننا أخذ متوسط هذه الانحرافات. وبما أن مجموع انحرافات القراءات لأي بيانات يساوي صفراً، لأن بعض الانحرافات موجب والبعض الآخر سالب وتتلاشى قيم هذه الانحرافات مع بعضها، فلتجاوز هذه المشكلة نأخذ الوسط الحسابي لمربعات هذه الانحرفات بدلاً من الانحرافات نفسها ونحصل بذلك على التبايُن .

أي أن التبايُن ، ويُرمز له بالرمز $ع^٢$ يحسب من العلاقة :

$$ع^٢ = \frac{\sum (س - \bar{س})^٢}{ن}$$

ومن الواضح أنَّ وحدات التباين هي مربَّع الوحدات الأصلية للقراءات ونظراً لأفضلية أن يكون لمقياس التشتُّت وحدات المفردات نفسها ، نأخذ الجذر التربيعي للتباين كمقياس ويُسمى الانحراف المعياري أي أنَّ :

تعريـــف (٨ ـــ ٩) :

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربَّعات انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي .

أي أنَّ الانحراف المعياري ويُرمز له بالرمز ع هو :

$$ع = \sqrt{\frac{\quad}{ن}}$$

مثـال (٨-٢١) :

أوجد الانحراف المعياري للقراءات التالية : ١٥ ، ١٢ ، ١٠ ، ٩ ، ١٤

الحــــــــل :

نحسب أولاً قيمة الوسط الحسابي :

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$= \frac{١٥ + ١٢ + ١٠ + ٩ + ١٤}{٥}$$

$$= \frac{٦٠}{٥}$$

$$= ١٢$$

نُكوِّن جدولاً للحسابات يكون فيه العمود الأول للقراءات والعمود الثاني للفروق بين القراءات والوسط الحسابي والعمود الثالث لمربَّع الفرق. أما الصف

الأخير من العمود فيحتوي على مجموع كلٍّ من القراءات ومربَّعات فروقها عن الوسط الحسابي :

	س	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^{٢}
	١٥	٣	٩
	١٢	٠	٠
	١٠	−٢	٤
	٩	−٣	٩
	١٤	٢	٤
المجموع	٦٠	ـــــ	٢٦

ومن الجدول نجد أنَّ التباين هو :

$$ع^{٢} = \frac{١}{ن} \sum (س - \bar{س})^{٢}$$

$$= \frac{١}{ن} \times ٢٦$$

$$= ٥,٢$$

والانحراف المعياري هو :

$$ع = \sqrt{\frac{\quad}{ن}}$$

$$= \sqrt{\quad}$$

$$= ٢,٢٨$$

ملحوظة (٨ - ١) :

نقصد بالإشارة $\sum$ التجميع من القراءة رقم ١ إلى القراءة رقم ن أي أن :

$$\sum س = س_{١} + س_{٢} + \ldots + س_{ن}$$

ومن ذلك نجد خواص إشارة التجميع $\sum$ وهي :

(١) $\sum (س + ص) = \sum س + \sum ص$

البرهان :

$$\sum (س + ص) = (س_{١} + ص_{١}) + (س_{٢} + ص_{٢}) + \ldots + (س_{ن} + ص_{ن})$$

$$= س_{١} + س_{٢} + \ldots + س_{ن} + ص_{١} + ص_{٢} + \ldots + ص_{ن}$$

$$= (س_{١} + س_{٢} + \ldots + س_{ن}) + (ص_{١} + ص_{٢} + \ldots + ص_{ن})$$

$$= \sum س + \sum ص \, .$$

(٢) $\sum (أ + س) = ن أ + \sum س$ ، حيث أ مقدار ثابت .

البرهان :

$$\sum (أ + س) = (أ + س_{١}) + (أ + س_{٢}) + \ldots + (أ + س_{ن})$$

$$= \underbrace{أ + أ + \ldots + أ}_{\text{ن مرة}} + س_{١} + س_{٢} + \ldots + س_{ن}$$

$$= ن أ + \sum س$$

(٣) $\sum أ س = أ \sum س$

البرهان :

$$\sum أ س = أ س_{١} + أ س_{٢} + \ldots + أ س_{ن}$$

$$= أ (س_{١} + س_{٢} + \ldots + س_{ن})$$

$$= أ \sum س_{ن}$$

(٤) يلاحظ من برهان العلاقة (٢) بأن : Σأ = ن أ

صيغة مختصرة للانحراف المعياري :

الانحـراف المعيـاري ع = $\sqrt{\quad}$ ويـمكـن كـتابـة صيغـتـه المختصرة على الصورة :

ع = $\sqrt{\quad}$

ولبرهان صحة الصيغة المختصرة (للاطلاع فقط) نستخدم خواص إشارة التجميع Σ.

صيغة الانحراف المعياري السابقة هي :

ع = $\sqrt{\quad}$

= $\sqrt{\quad}$

= $\sqrt{\quad}$

ولأن سَ مقدار ثابت فإننًّا باستخدام الخاصية (٣) بالنسبة للحد الثاني داخل القوس والخاصية (٤) بالنسبة للحد الثالث ،

نجد أن :

ع = $\sqrt{\quad}$

= $\sqrt{\quad}$

= $\sqrt{\quad}$

= $\sqrt{\quad}$

ومن الواضح أنَّ صيغة التبايُن المختصرة هي :

$$ع^{٢} = \frac{١}{ن} \sum س^{٢} - \bar{س}^{٢}$$

أي أنَّ التبايُن في صيغته المختصرة هو الفرق بين الوسط الحسابي لمربَّعات القراءات ومرَّبع الوسط الحسابي للقراءات .

مثال (٨-٢٢) :

أوجد الانحراف المعياري لبيانات المثال (٨ - ٢١) السابق .

الحـــل :

نكوّن جدولاً من عمودين الأول للقراءات والثاني لمرَّبعات القراءات ، ويكون الصف الأخير لمجموع القراءات ومجموع مربَّعاتها كما يلي :

	س	$س^{٢}$
	١٥	٢٢٥
	١٢	١٤٤
	١٠	١٠٠
	٩	٨١
	١٤	١٩٦
المجموع	$\sum س = ٦٠$	$\sum س^{٢} = ٧٤٦$

ومن ذلك نجد أن :

$$\sum س = ٦٠ ، \sum س^{٢} = ٧٤٦$$

ويكون التباين :

$$ع^{٢} = \frac{١}{ن} \sum س^{٢} - \bar{س}^{٢}$$

$= \frac{١}{٥} \times ٧٤٦ - (\frac{٦٠}{٥})^{٢}$

$= ١٤٩,٢ - (١٢)^{٢}$

$= ١٤٩,٢ - ١٤٤$

$= ٥,٢$

ومن ذلك يكون الانحراف المعياري :

$ع = \sqrt{\quad - \quad}$

$ع = \sqrt{\quad}$

$ع = ٢,٢٨$

البيـانـات المبـوَّبــة :

من تعريف الانحراف المعياري في حالة البيانات غير المبوَّبة فإنه يمكن استنتاج صيغة الانحراف المعياري للبيانات المبوَّبة في جدول تكراري كما يلي :

$ع = \sqrt{\quad - \quad}$

حيث إنَّ : س ترمز لمراكز الفئات.

ك التكرار المناظر لمركز الفئة.

ن مجموع التكرارات = Σك .

سَ الوسط الحسابي = $\frac{\Sigma \text{س ك}}{\text{ن}}$

ولو استخدمت خواص إشارة التجميع Σ لوجدت أنَّ الصيغة المختصرة للانحراف المعياري في حالة البيانات المبوَّبة هي :

$ع = \sqrt{\quad - \quad}$

مثـال (٨-٢٣) :

أوجد الانحراف المعياري لبيانات أجور العمال في المثال (٨ - ٣) كما في الجدول (٨ - ١٣).

الحــــــــــل :

في الجدول (٨ - ١٣)، لدينا مراكز الفئات والتكرارات، ولإيجاد الانحراف المعياري نكوِّن جدولاً يكون العمود الأول فيه لمراكز الفئات س والعمود الثاني للتكرارات ك والعمود الثالث لحاصل ضرب التكرارات في مراكز الفئات س ك والعمود الرابع لحاصل ضرب مربَّعات مراكز الفئات في التكرارات $س^٢ ك$ كما يلي :

مراكز الفئات س	التكرارات ك	س ك	$س^٢$ ك
٥٥	٨	٤٤٠	٢٤٢٠٠
٦٥	١٢	٧٨٠	٥٠٧٠٠
٧٥	١٤	١٠٥٠	٧٨٧٥٠
٨٥	٢٤	٢٠٤٠	١٧٣٤٠٠
٩٥	٨	٧٦٠	٧٢٢٠٠
١٠٥	٨	٨٤٠	٨٨٢٠٠
١١٥	٦	٦٩٠	٧٩٣٥٠
المجمـــوع	**٨٠**	**٦٦٠٠**	**٥٦٦٨٠٠**

ومن ذلك نجد أنَّ :

$$ع^٢ = \frac{١}{ن} \sum س^٢ ك - \left(\frac{\sum س ك}{ن}\right)^٢$$

$$= \frac{١}{٨٠} \times ٥٦٦٨٠٠ - \left(\frac{٦٦٠٠}{٨٠}\right)^٢$$

$$= ٧٠٨٥ - (٨٢,٥)^٢$$

$$= ٧٠٨٥ - ٦٨٠٦,٢٥$$

$$= ٢٧٨,٧٥$$

ومن ذلك يكون الانحراف المعياري :

ع = $\sqrt{\quad}$

= $\sqrt{\quad}$

= ١٦,٦٩٦

تـــمـــــاريـــن (٨ ــ ٤)

(١) إذا كانت درجات طالب في الامتحان الشهري لخمس مواد دراسية هي كما يلي :
٧ ، ٤ ، ٦ ، ٩ ، ٨ فأوجد التباين والانحراف المعياري للدرجات .

(٢) (أ) كوّن مجموعة من القراءات لها الوسط الحسابي نفسه وتختلف في انحرافها المعياري.
(ب) كوّن مجموعة من القراءات لها الوسيط نفسه وتختلف في انحرافها المعياري.

(٣) في التمرين (٤) من مجموعة التمارين (٨-٣)كانت بيانات حفظ الأجزاء العشرة الأخيرة من القرآن الكريم لمائتي طالب كما يلي :

عدد الأجـزاء	١	٢	٣	٤	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الطلاب	١٢	١٩	٣٥	٥٠	٣٢	١٦	١٢	١٣	١١

أوجد التباين والانحراف المعياري لعدد الأجزاء التي يحفظها الطلاب .

(٤) استخدم الانحراف المعياري في تقريرك عن مبيعات المطعم المعطاة في التمرين (٦) من التمارين (٨-٣) وذلك بالنسبة للانحراف المعياري لأعداد علب العصير المباعة.

(٥) إذا كان مجموع مربعات درجات طالب في المقررات الدراسية ٧٢٤١٠

والوسط الحسابي لدرجاته (مُعدَّله) ٨٥ فأوجد عدد المقررات الدراسية له إذا علمت أنَّ الانحراف المعياري لدرجاته في هذه المقررات ع = ٤ .

(٦) في دراسة لكمية البنزين التي تستهلكها مجموعة من السيارات كانت النتائج كما يلي :

عدد الكيلومترات لكل جالون	٢٥ –	٢٧ –	٢٩ –	٣١ –	٣٣ –
عدد السيـــارات	٥	٧	٩	٥	٤

أوجد التبايُنَ والانحراف المعياري لعدد الكيلومترات لكل جالون .

(٧) إذا كانت بيانات عدد الأفراد في ٥٠ أسرة كما يلي :

عدد الأفـراد	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الأسـر	٥	٧	٨	١٢	٩	٥	٤

فأوجد التبايُنَ والانحراف المعياري لعدد أفراد الأسرة .

(٨) إذا كانت المصاريف اليومية بعشرات الريالات لعينتين من الأسر في مدينتين متجاورتين كما يلي :

العيِّنة الأولى : ٢٤ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ١٨ ، ٣٢ .

العيِّنة الثانيـة : ٢٧ ، ٢٥ ، ٢٥ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٦.

أي من العيِّنتين السابقتين أكثر تشتُّتاً ؟

(٩) إذا علمت أن الانحراف المعياري لعيِّنة عددها ٩ هو ٢ ووسطها الحسابي ٨ فأوجد $\sum$ س^{٢} لهذه العيِّنة .

تمارين عامة على الباب الثامن

(١) استخدم الأعمدة البيانية، والقطاعات الدائرية لتمثيل الجدول الآتي والذي يحتوي على ارتفاعات أعلى سبعة مباني ومنشآت في العالم .

المكان	الارتفاع بالأمتار	المبنى أو المنشأة
نيويورك	٣٨١	مبنى «الإمبير ستيت»
نيويورك	٣١٩	مبنى «كرايزلر»
باريس	٣٠٠	برج «إيفل»
نيويورك	٢٩٠	مبنى «وول ستريت»
نيويورك	٢٨٣	بنك مانهاتن
نيويورك	٢٥٩	مبنى «آرسي أيد مركز روكفلر»
نيويورك	٢٤١	مبنى «وولورث»

(٢) أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبيانات الجدول التالي الذي يوضِّح السرعة المدارية لكواكب المجموعة الشمسية .

الكوكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زُحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
السرعة كم/ث	٤٧,٨	٣٥,١	٢٩,٨	٢٤,١	١٣	٩,٧	٦,٨	٥,٥	٤,٨

(٣) أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة الأرقام التالية .

(أ) ٣ ، ٥ ، ٢ ، ٦ ، ٥ ، ٩ ، ٢ ، ٦٨

(ب) ٥٠,٣ ، ٤٨,٧ ، ٥١,٦ ، ٤٩,٥ ، ٤٨,٩

(٤) إذا كانت درجات ٨٠ طالباً في مقرر الرياضيات في أحد الفصول الدراسية بجامعة الملك سعود هي كما يلي :

٧٣ ، ٥٥ ، ٥٩ ، ٦٢ ، ٦٨ ، ٧٣ ، ٧٥ ، ٨٤ ، ٨٨ ، ٩٠ ، ٩٥ ، ٥٧ ،
٦٠ ، ٦٨ ، ٧٦ ، ٨٢ ، ٨٨ ، ٩٣ ، ٩٦ ، ٦١ ، ٦٥ ، ٧١ ، ٧٩ ، ٨٢ ،
٨٥ ، ٩٣ ، ٩٥ ، ٩٩ ، ٦٦ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٨٣ ، ٨٧ ، ٩٤ ، ٦٠ ، ٩٧ ،
٥٦ ، ٦٩ ، ٧٢ ، ٧٥ ، ٨٠ ، ٨٩ ، ٥٨ ، ٧٤ ، ٧٨ ، ٨١ ، ٨٥ ، ٦٠ ،

٦٥ ، ٧١ ، ٧٨ ، ٨١ ، ٨٥ ، ٦٢ ، ٦٥ ، ٧٧ ، ٦٣ ، ٦٧ ، ٧٨ ، ٧٤،
٧٥ ، ٧٧ ، ٥٨ ، ٧٩ ، ٧٩ ، ٨٨ ، ٩٠ ، ٧٥ ، ٧٨ ، ٧٧ ، ٦٧ ، ٧٨،
٦٥ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٥٦ ، ٩٤ ، ٧٨ ، ٧١ ، ٧٣.

فالمطلوب :

(أ) حدِّد قيمة أصغر درجة وأكبر درجة .

(ب) استخدم الجدول التكراري لتمثيل هذه البيانات (يفضل أن يكون من ٩ فئات).

(ﺟ) أوجد الجدول التكراري النسبي والمئوي .

(د) مثّل هذه البيانات مستخدماً المضلَّع التكراري، والمنحني التكراري .

(ﻫ) أوجد الجدول المتجمِّع الصاعد ومثله بيانياً .

(و) أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال مستخدماً البيانات المبوَّبة (أي الجدول التكراري) .

(ز) أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات مستخدماً الجدول التكراري .

(٥) إذا كانت أوزان عيِّنة تتألف من مئة طالب من جامعة الملك سعود بالرياض هي كما في الجدول الآتي :

مركز الفئة	التكرار
٦١	٥
٦٤	١٨
٦٧	٤٢
٧٠	٢٧
٧٣	٨

فأوجد ما يلي :

(أ) الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

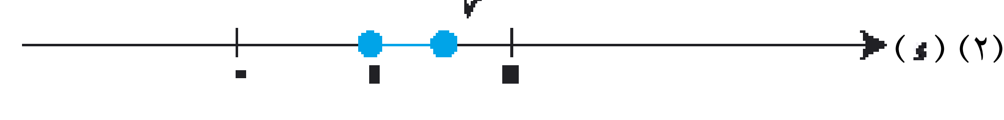
(ب) الانحراف المعياري .

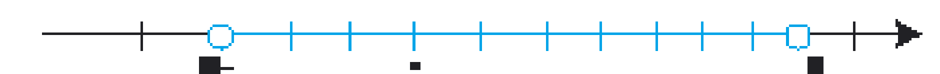
إجابة تمارين الجزء الثاني

الباب الخامس :

التمارين (٥ - ١) :



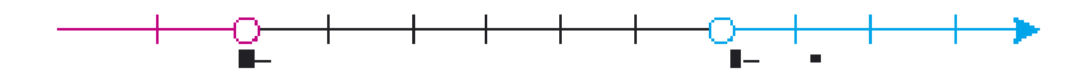




(٤) مجموعة الحل هي الفترة (٣- ، ٧)



(٥) مجموعة الحل هي : [- ٤٨ $\frac{٢}{٣}$ ، ٤٤ $\frac{٢}{٣}$]



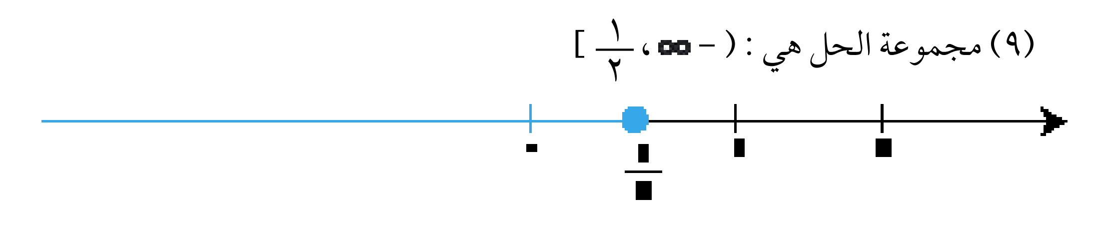
(٦) مجموعة الحل هي : (- ∞ ، -٧) ∪ (-١ ، ∞)

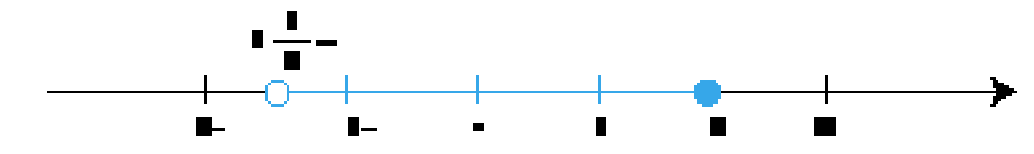


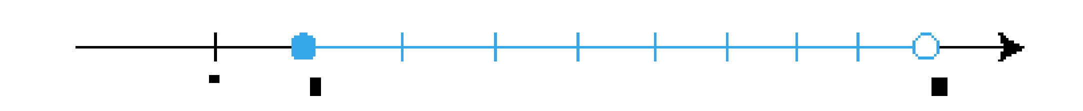
(٧) مجموعة الحل هي المجموعة الخالية .

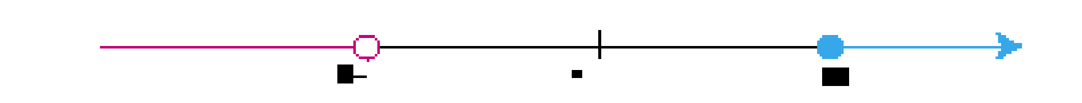
(٨) مجموعة الحل هي : [٢ $\frac{٧}{٨}$ ، ٣ $\frac{١}{٨}$] - { ٣ }

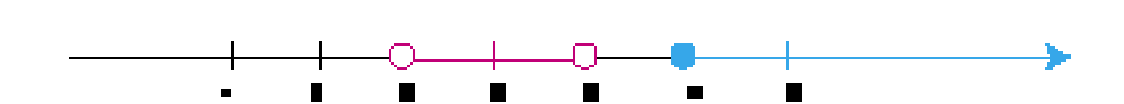
(٩) مجموعة الحل هي : (− ∞ ، $\frac{١}{٢}$]











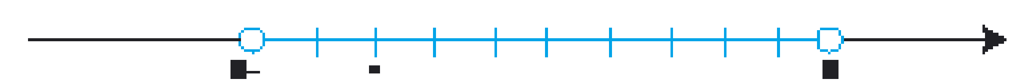
(١٤) طول الضلع الثالث يقع في الفترة (٩ ، ١٣) .

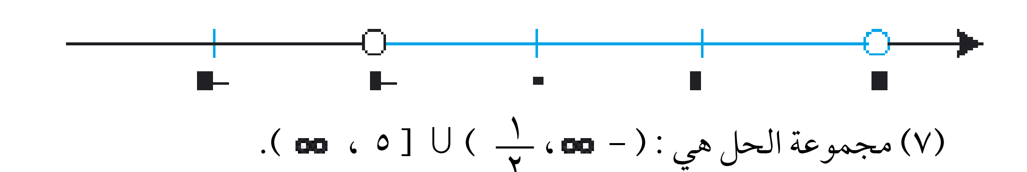
(١٥) طول الضلع الرابع يقع في الفترة (٣ ، ٢٣) .

(١٦) السرعة المطلوبة تقع في الفترة (٥ , ٦٧ ، ٥ , ٩٢)

التمارين العامة :

(١) مجموعة الحل هي : (٢- ، ٨) .





(٧) مجموعة الحل هي : (- ∞ ، $\frac{١}{٢}$) ∪ [٥ ، ∞).

الباب السادس :

التمارين (٦ - ١) :

١] (أ) $\frac{٧}{١٨}$ ط ، (ب) $\frac{٥}{١٢}$ ط ، (جـ) $\frac{٢}{٣}$ ط ،

(د) $\frac{٣}{٤}$ ط ، (هـ) $\frac{٥}{٧٢}$ ط ، (و) $\frac{١١}{٦}$ ط ،

٢] (أ) ١٣٥° ، (ب) ٢٤٠° ، (جـ) ٢٧٠° ،

(د) ١٢٠° ، (هـ) ١٥٠° ، (و) ٧٥°

٣] المسافة التي قطعها عقرب الساعات = ٤ , ٤ سم .

٤] سرعة القمر الصناعي = ١١ , ١٢٢ كلم / دقيقة.

٥] طول القوس = ٠٣ , ٠ كم .

٦] الميل البحري ≈ ١,٨٩ كم .

٧] (أ) ١٩٦,٢٥ سم ، (ب) ٤٦,١٥٨م ،

(هـ) ١٤٥,٠٧م ، (د) ١٨,٨٤ م .

٨] (أ) ٢,٠١سم ، (ب) ١,٧ م ،

(هـ) ١,٥٤م ، (د) ٢ م .

التمارين (٦ - ٢):

١] جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا هـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ظتا هـ = $\frac{٣}{٤}$

٢] جتا هـ = $\frac{٥}{١٣}$ ، جا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ظا هـ = $\frac{١٢}{٥}$

٣] جا س = $\frac{\sqrt{}}{٢}$ ، ظا س = $\sqrt{}$ ، ظتا س = $\frac{\sqrt{}}{٣}$ ، س = ٦٠°

٤] جتا هـ = $\frac{١}{٣}$ ، جا هـ = $\frac{٢\sqrt{}}{٣}$ ، ظا هـ = $٢\sqrt{}$ ، ظتا هـ = $\frac{\sqrt{}}{٤}$

التمارين (٦ - ٣):

١] جا هـ = $\frac{\sqrt{}}{٢}$ ، ظا هـ = $\sqrt{}$ ، ظتا هـ = $\frac{\sqrt{}}{٣}$

٢] جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، ظتا هـ = $\frac{٤}{٣}$

٤] جا أ $\hat{م}$ أَ = $\frac{٣}{\sqrt{}}$ ، جا ب $\hat{م}$ بَ = $\frac{٣}{\sqrt{}}$

٦] (أ) |أب| = $٢\sqrt{}$

(ب) جا أ = $\frac{٣}{٤}$ ، جتا أ = $\frac{\sqrt{}}{٤}$ ، ظا أ = $\frac{٣}{\sqrt{}}$ = $\frac{٣\sqrt{}}{٧}$ ، ظتا أ = $\frac{\sqrt{}}{٣}$

(هـ) جا هـ = $\frac{\sqrt{\ }}{٤}$ ، جتا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، ظا هـ = $\frac{\sqrt{\ }}{٣}$ ، ظتا هـ = $\frac{٣\sqrt{\ }}{٧}$

التـمـاريـن (٦ - ٤) :

١] جتا هـ = $\frac{\sqrt{\ }}{٢}$ ، ظا هـ = $\frac{\sqrt{\ }}{٣}$ ، ظتا هـ = $\sqrt{\ }$

٢] $\frac{٧}{٣}$

٣] (هـ) ظا هـ = $\frac{٢\sqrt{\ }}{١٥}$

٤] جتا ٣١° ≈ ٠,٨٦ ، جا ٣١° ≈ ٠,٥١ ، ظتا ٣١° ≈ ١,٧

٦] هـ = ٤٥°

التـمـاريـن (٦ - ٥) :

١] (١) جا ٤٥ = جتا ٤٥ = $\frac{\sqrt{\ }}{٢}$ = ٠,٧٠٧١ (الجدول) .

جا ٤٥ = ٠,٧٠٧١٠٦٧ (الآلة الحاسبة).

٢] ٠,٤٣٠٥ ، ٠,٩٠٧٥ ، ٠,٩٧٦٩ ، ٠,٦٠٤٦ ، ٠,٨٩٥١ ، ٠,٥٩٤٦

٣] ٥٨ً ٤٩َ ١٤°، ٣٠َ ٤٨°، ٣٦َ ٥٥°، ٣٦َ ٥٥°، ٥٧َ ٤٢°، ٣٠َ ٤٨°، ٣٠َ ٦٧°

٤] ارتفاع المئذنة ≈ ٢٦,٠٢٨م .

٥] طول الشجرة = ١٩,١٧م.

ارتفاع المنزل = ٥,٣١ م.

٦] ارتفاع قمة الجبل = ١٠٨١,٥٣ م .

٧] ارتفاع التل = ٢٦,٨٧ م .

٨] المسافة التي سارها الرجل = ٢,٤٦ م .

٩] ارتفاع المئذنة = بعدها عن المبنى = ٢٣,٦٦ م .

١٠] عرض النهر = ١٢٤,٧ م .

١١] البعد بين القريتين = ٥٠٥,٤٩ م .

١٢] ارتفاع العمود = ١٧,٩٤م .

التمارين العامة :

١] (أ) $\frac{٧ط}{٣٠}$ ، ٠,٤٩ ط ، ٠,٢٨ ط ، $\frac{١٥}{ط}$

(ب) $\frac{١}{٢}$ راديان : ٢٨° ٣٩َ

١ راديان = ٥٧° ١٧َ

$\frac{ط}{١٢}$ = ١٥°

$\frac{٣}{٢}$ راديان = ٨٥° ٥٧َ

٢] طول القوس = ٠,٧٩ سم . ٣] سرعة القمر = ١٠٢٠٥ كم / الساعة.

٤] طول الضلع القائم الآخر ≈ ٣,٥٧ سم .

٨] جا ٢٥َ ٢٧° = ٠,٤٦٠٥ ، ظتا ١٧َ ٦٩° = ٠,٣٧٨٠

٩] جا ٢٥َ ٢٧ = ٠,٤٦٠٤٥٨ ، ظتا ١٧َ ٦٩° = ٠,٣٧٨٢٠١

١٠] ٣٠,٣١ م . ١١] المسافة بين الباخرتين = ١٩٤,٤٥ كم .

إجابة تمارين الباب السابع

التمارين (٧ - ٢) :

(١٠) $\frac{٤}{٣}$ ص ، (١١) س ، (١٢) $\frac{ع^{٢}}{س}$ ، (١٣) $هـ^{ن}$

(١٤) ٢٦ بليون كم (١٥) ٠,٠١٥ ثانية ١٦) ١٢٧٣ يوم تقريباً

(١٧) ٢,٤٦ × $١٠^{٤}$ كم (١٨) ٨٣٣٣ متراً .

التمارين (٧ - ٣) :

(١١) $أ^{٨}ب^{٦}$ ، (١٢) $\frac{٨س^{١٢}}{٩ص^{٥}}$ ، (١٣) ٢ + $أ^{ن}ب^{ن}$ + $أ^{-ن}$ $ب^{-ن}$

(١٤) $\frac{س + ١}{١ - س}$ ،　　(١٥) $\frac{٤}{٩}$ ،　　(١٦) $\frac{٩}{٢}$

(١٧) ٩،　　(١٨) ٣×١٠^{-٩} ثانية .

التمارين (٧ - ٤) :

(١) ٢ $\sqrt{\quad}$ ،　　(٢) ٢ب^{٢} ($\sqrt{\quad}$ - ١)،　　(٣) ٥ |س|

(٤) |س ٥-|　　(٥) س٢- $\sqrt{\quad}$ + ٤ ،　　(٦) ١٠

(٧) $\sqrt{\quad}$ + $\sqrt{\quad}$ ،　　(٨) $-\frac{\sqrt{\quad}}{٤}$　　(٩) أ^{٢} $\sqrt{\quad}$

(١٠) $\sqrt{\quad}$ + $\sqrt{\quad}$ ،　　(١١) $\sqrt{\quad}$ - ٢

(١٢) $\sqrt{\quad}$　　(١٣) $\sqrt{\quad}$

(١٥) ١٦٠٠،　　(١٦) ٤٤١ ،　　(١٧) ٠,٠٥٤ ،　　(١٨) ٢٦

التمارين (٧ - ٥) :

(١٠) ٥,٤م ،　　(١١) ٢^{٦}،　　(١٢) ٢ $\sqrt{\quad}$ - $\sqrt{\quad}$

(١٣) ٥ $^{٢}\sqrt{\quad}$　　(١٤) $\frac{١}{أ^{٤}}$ ،　　(١٥) ٣ $^{٤ط + ١}$

(١٦) (أ • ب) $\sqrt{\quad}$ ،　　(١٧) $\frac{١}{\sqrt[٧]{\quad}}$ ،　　(١٨) ١

(١٩) $\frac{٥}{١٢}$ ،　　(٢٠) ٥ $^{-٠,٨٢٨}$ ،　　(٢١) ٣ $^{-٠,٨٦٦}$

(٢٢) ١٠ ^{١,٨٦٦} ،　　(٢٣) ٢ ^{٢١,٧٢٨}

(٢٤)٨, ٢ (٢٥) ، -٣٦٠، (٢٦) ٢٢, ٦١

(٢٧) ٢ ، (٢٨) $\sqrt{}$ (٢٩) هـ $^{\frac{١٣}{٦}}$

(٣٠) س - ص ، (٣١) ٩ ، (٣٢) ١

التمارين (٧ - ٦) :

(١١) $\frac{٣}{٢}$ ، (١٢) ١ ، (١٣) ٣

(١٤) ١ ، (١٥) ٢ ، ٥ ,٠ (١٧) ، $\frac{١}{١١}$ - (١٦) ، -٢

التمارين (٧ - ٧) :

(١) س = -٤ ، (٢) س = -٢,٥ ، (٣) س = ١ ،

(٤) س = $\frac{١}{٥}$ ، (٥) س = ٣ ، (٦) ١ ، ٥ ,١

(٧) ١ ، -٢ ، (٨) ١ (١٠) $\frac{٧}{٢}$ ، - ، ٠ ،

(١١) ٦ ,٠ ، (١٢) -٣ ,٠ (١٣) ، -١,٧

التمارين (٧ - ٨) :

(١٩) ٤ ، (٢٠) ٨ ^{٣٢} (٢١) $\sqrt{}$

(٢٢) ٣ $^{\frac{٣}{٤}}$ ، (٢٣) ٢٧ ،

(٢٤) ٦، (٢٥) ± ٣ ، (٢٩) ١

(٣٠) ١ ، (٣٤) ١

التمارين (٧ - ٩) :

(١) لو$_{٢}$ ٣ -٢ ، (٥) $\frac{٣}{٢}$ لو$_{٥}$ س، (١٧) لو$_{١٠}$ (س^{٢} ٠ ص^{٥})

(١٨) لو$_{٣}$ $\frac{٨س^{٢}}{ص}$ ، (١٩) لو$_{أ}$ ص س ، (٢٠) لو$_{٣}$ $\frac{٣}{ب}$

(٢١) -لو$_{أ}$ هـ ، (٢٢) لو$_{٢}$ ٤هـ ، (٢٣) ٩

(٢٤) ٦ ، (٢٥) ٦٤ ، (٢٦) ٢ لو$_{٢}$ ٣

(٢٧) ١,١٧٦ ، (٢٨) ٢,٠٩٧ ، (٢٩) -٠,٢٢٢

(٣٠) ٠,٩٥٤ ، (٣١) { ٣ } ، (٣٥) { ٥ }

التمارين (٧ - ١٠) :

(٢٥) ٣٧١,٥ ، (٢٦) ٠,٤٢٦٦ (٢٧) ٠,٠٠١٧

(٣١) ٦,٢٤٤٢ ، (٣٢) ٠,٠٠١ ب

التمارين (٧ - ١١) :

(١) ٤,٨٦ ، (٢) ٤,٠٥ ، (٣) ١,٩٨

(٤) ٠,٦٩٦ (٦) ، ٠,٤١ (٥) ، -٧,٤٥

(٧) ٥,٣ × ١٠$^{-٦}$ ، (٨) ١١٣٢,٨ ، (٩) ٢,٤ × ١٠$^{-٦}$

(١٠) ٦٥٠٧٩,٨٧ ، (١١) ١,٦٧٤ ، (١٢) ٤٦,٦٦٧٨٥٥

(١٣) ٠,٠٠٢٥٣٢٩٦ (١٤) ٢٦٣٢,١٢٨٧ (١٥) ١٢,٠٧ سم

(١٦) ١,١٨٧ دسم (١٧) ١,٢٢٥ ، (١٨) ٠,١٢٢٩٠١٦

التمارين العامة :

(٢٧) ٦ ، ٣ } (٢٩) ، { ٥ } (٢٨) ، -٢ }

(٣٠) } ٢,١٩٠١٣ (٣٢) ، { ٣ ، -٣ } (٣١) ، {١٢ ، -١٢

(٣٣) ± ٧٧٨,٠٣٧ ، (٣٤) ٥ ، (٣٥) ٥

(٣٦) ٤ ، (٣٧) ٨١ ، (٣٨) ١٠

(٤٣) ب ∃ (٠، √٢ [، (٤٤) ١,٢١١٦٣٦٩ ، (٤٥) ١,٤٠٦٩٩١٥

(٤٦) ١١٠٣٤٥٢٥ ، (٤٧) ١,٣٠٨٠٥ × ١٠^٨ ، (٤٨) ١,٦٦٣٩٥ × ١٠^-٧

إجابة تمارين الباب الثامن

التمارين (٨ - ٢) :

٦) (أ) ٠,٢٨ (ب) ٠,١٢ ٧) (هـ) ٧٢ سيارة.

التمارين (٨ - ٣) :

٤) (أ) ٤,٩١ جزءاً (ب) ٤ أجزاء

٥) (أ) ١٠٦٣,١٢٥ كم (ب) ٩٤١,٥ كم

٨) (أ) ١٤٩,٤ سم، (ب) ١٤٨,٣ سم، (هـ) ١٤٥,٧١٤سم.

٩) ٥ مليون ريال تقريباً .

التمارين (٨ - ٤) :

١) ع ≈ ١,٧٢٠٥ درجة.

٣) ع ≈ ٢,٤٨٨ جزءاً، (٤) ٩٧,٤٩

٥) ع ≈ ن = ١٠ مقررات. ٦) ع = ٢,٥٢ كم .

٧) ع = ١,٧٠٤٦ فرداً. ٩) ٦١٢.

التمارين العامة :

٣) (أ) ١٢,٥ ، ٥ ، ٢,٥ (ب) ٤٩,٨ ، ٤٩,٥ ، لا يوجد منوال.

٥) (أ) ٦٧,٤٥ ، ٦٧,٤٢٩ ، ٦٧,٣٤٦ (ب) ٢,٩٢

شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية